

# 42

## LA TRANSFERENCIA ENTRE REPRESENTACIONES DE LA ESFERA EN LA FORMACIÓN INICIAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICA

### THE TRANSFERENCE AMONG REPRESENTATIONS OF THE SPHERE IN THE INITIAL FORMATION OF TEACHERS OF MATHEMATICS

Ortelio Nilo Quero Méndez<sup>1</sup>

E-mail: [oquero@uniss.edu.cu](mailto:oquero@uniss.edu.cu)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-7872-2957>

Aldo Medardo Ruiz Pérez<sup>1</sup>

E-mail: [aldo580608@yahoo.es](mailto:aldo580608@yahoo.es)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1882-385X>

<sup>1</sup>Universidad de Sancti Spiritus "José Martí Pérez" Cuba.

#### Cita sugerida (APA, sexta edición)

Quero Méndez, O. N., & Ruiz Pérez, A. M. (2018). La transferencia entre representaciones de la esfera en la formación inicial del profesor de Matemática. *Revista Conrado*, 15(69), 309-317. Recuperado de <http://conrado.ucf.edu.cu/index.php/conrado>

#### RESUMEN

Este artículo contiene la solución a un problema acerca de la transferencia entre representaciones de la esfera, correspondiente al proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica en la formación inicial de profesores de Matemática. La causa fundamental del problema es el insuficiente desarrollo de la teoría de las representaciones en la didáctica de la Geometría Analítica, el cual se constata en el análisis de la bibliografía cuando se comprueba que en esta no se exponen todas las posibles transferencias y procedimientos para determinarlas y en consecuencia carece de tareas de aprendizaje para que los estudiantes puedan elaborar y fijar todos los procedimientos de transferencia. El artículo está dividido en cuatro partes; la parte inicial contiene los fundamentos teóricos para resolver el problema; en la segunda parte se expone un procedimiento para determinar las posibles transferencias entre representaciones de la esfera y los resultados de su aplicación; en la tercera parte se propone un conjunto de tareas para desarrollar la habilidad relativa a la transferencia entre representaciones de la esfera y finalmente en la cuarta parte se describen los resultados obtenidos con la utilización de las tareas.

#### Palabras clave:

Transferencia entre representaciones, esfera, geometría analítica.

#### ABSTRACT

This article contains the solution to a problem about the transference among representations of the sphere corresponding to the teaching-learning process of Analytic Geometry in the initial formation of teachers of mathematics. The main cause of this problem is the insufficient development of the theory of representations in didactic of Analytic Geometry which is confirmed in the analysis of the bibliography when it is checked that it does not have all the possible transferences and procedures to finish them and in consequence, it lacks of learning tasks in order the students can construct and fit procedures of transference. The article is divided into four parts, the initial part contains the theoretical fundamentals to solve the problem, the second part states a procedure to determine the possible transferences among representations of the sphere and the results of its application, the third part proposes a set of tasks to develop the skill relating to the transfer among representations of the sphere and finally in the fourth part, it describes the results obtained in the use of the learning tasks.

#### Keywords:

Transfer among representations, sphere, Analytic Geometry.

## INTRODUCCIÓN

El trabajo con representaciones en el proceso de enseñanza-aprendizaje (PEA) de la Geometría Analítica correspondiente a la formación de profesores de Matemática generalmente transcurre espontáneamente, según la lógica de la exposición del contenido matemático tal cual aparece en los libros, sin prestársele la debida atención al papel de la asignatura en la formación didáctica de los estudiantes.

En lo que respecta a la transferencia entre representaciones de la esfera se presta poca atención al tratamiento de todos los casos que se pueden presentar, quedando varios de ellos sin incluir en el contenido de la asignatura, entre los cuales están los relativos a las transferencias entre representaciones verbales.

Una de las manifestaciones de esta situación problemática consiste en que en la bibliografía que se utiliza en la asignatura no se determinan todas las transferencias posibles, ni se presentan tareas de aprendizaje que permitan elaborar y fijar los procedimientos a utilizar en el proceso de transferencia entre representaciones.

En el presente artículo se exponen los fundamentos teóricos para la determinación de las posibles transferencias entre las representaciones de la esfera, un procedimiento para determinar las posibles transferencias, ejemplos de tareas de aprendizaje que contribuyen al desarrollo de la habilidad para la transferencia entre representaciones de la esfera y los resultados obtenidos en la utilización de estas tareas por los autores durante tres cursos escolares en el PEA de la Geometría Analítica correspondiente a la carrera de Licenciatura en Educación, perfil Matemática y Física de la Universidad de Sancti Spíritus “José Martí Pérez”.

## DESARROLLO

En esta sección se presenta una síntesis de los fundamentos teóricos fundamentales de la transferencia entre representaciones, expuestos en Quero & Ruiz (2015, 2016a & 2016b), contextualizados al caso de la esfera como objeto geométrico.

En tales fundamentos se exponen concepciones teóricas desarrolladas por los autores acerca de dos de los conceptos centrales de la teoría de las representaciones de los objetos geométricos: los conceptos de representación y de transferencia entre representaciones.

La palabra representación tiene doble significado en la matemática y en su PEA: designa un proceso y el resultado de un proceso.

En los párrafos siguientes se analizará primeramente el significado de la frase *representación de una esfera* como resultado y en un segundo momento se examinará su significado como proceso mediante el análisis de la transferencia entre representaciones de una esfera.

En la Geometría Analítica una representación de una esfera es un objeto, material o mental, que la sustituye y la hace presente determinándola de manera única en el pensamiento, el lenguaje y la comunicación con el uso de un sistema de coordenadas elegido convenientemente como sistema de referencia.

En este concepto de representación intervienen dos objetos importantes; en primer lugar una esfera: el objeto representado y en segundo lugar quien la representa: el objeto representante.

En la geometría analítica se utilizan varias representaciones para las esferas, lo cual exige compararlas y agruparlas en clases, según *la naturaleza de las componentes predominantes en el objeto representante*, para formar conceptos subordinados al concepto de representación.

Los tipos de representación de la esfera (subclases de la extensión de este concepto) a considerar, según *la naturaleza de las componentes predominantes en el objeto representante*, son el verbal, el gráfico y el analítico. Estos tipos son las extensiones de los conceptos de representación verbal, representación gráfica y representación analítica de una esfera que se describen a continuación.

**Representación verbal** de una esfera, en la geometría analítica, es una representación mediante una frase que está compuesta por palabras del lenguaje común, palabras de la terminología matemática y eventualmente por signos matemáticos. Por ejemplo, las frases: *esfera de centro C (2;3;-1) y radio 5 unidades* y *esfera que pasa por los puntos A (2,1;3), B (3,-2,1), C (-4,1;1) y D (1,1;-3)* corresponden a representaciones verbales de una esfera.

Toda representación verbal de una esfera está basada en entes que la determinan de manera única según la teoría geométrica.

**Representación gráfica** de una esfera, es una representación en la cual predomina una figura geométrica, es decir, es una representación que siempre contiene una figura geométrica y eventualmente frases o signos matemáticos, particularmente de la geometría analítica.

**Representación analítica** de una esfera, es una representación en la que predomina una ecuación o sistema de ecuaciones.

Las ecuaciones  $E_1: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 8 = 0$

y  $E_2: (x-2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 6$  corresponden a representaciones analíticas de esferas.

Para comparar dos representaciones de un mismo tipo se utiliza su forma. La forma de una representación es entendida como la configuración general del objeto representante, de modo que dos representaciones de diferentes tipos tienen distintas formas, mientras que dos representaciones del mismo tipo pueden tener la misma forma o formas distintas.

Existen diferentes formas de representación analítica y diferentes formas de representación verbal de una misma esfera para cada sistema de coordenadas; el tipo gráfico tiene una única forma para cada sistema de coordenadas.

El conocimiento matemático tiene un carácter institucional porque se construye en el marco de una comunidad científica y como cualquier otro conocimiento es un producto histórico-cultural. Una de las implicaciones de este carácter institucional en la teoría de las representaciones de los objetos matemáticos es que los elementos de los conjuntos bases de las estructuras tienen formas de representación establecidas por la institución matemática, a las cuales se les llama **formas reconocidas de representación**.

El significado operacional de la frase **representación de una esfera** se refiere al proceso de representación, es decir, al proceso dirigido a obtener una representación de la esfera y expresarla externamente, ya sea, la primera de sus representaciones o una representación a partir de otra existente. Este último caso corresponde a la transferencia cuya definición fue elaborada por los autores de este artículo y se expone a continuación.

Si se tiene una esfera  $E$  determinada por su representación  $R_1$  en la forma  $F_1$  del tipo  $T_1$  correspondiente al sistema de coordenadas  $C_1$  del tipo  $\tau_1$  y se desconoce su representación  $R_2$  en la forma  $F_2$  del tipo  $T_2$  correspondiente al sistema de coordenadas  $C_2$  de tipo  $\tau_2$ , el proceso mediante el cual se obtiene  $R_2$  a partir de  $R_1$  se llama transferencia de  $R_1$  a  $R_2$ . Si inversamente se conociera  $R_2$  y desconociera  $R_1$ , el proceso que permite obtener  $R_1$  a partir de  $R_2$  se llama transferencia de  $R_2$  a  $R_1$ .

Cuando  $C_1=C_2$  la transferencia se llama transferencia intrasistema, si en cambio  $C_1 \neq C_2$ , esta se denomina transferencia intersistemas.

Cuando  $T_1=T_2$  la transferencia se llama transferencia intratipo, si en cambio  $T_1 \neq T_2$ , esta recibe el nombre de transferencia intertipos.

Si quien realiza la transferencia de  $R_1$  a  $R_2$  o de  $R_2$  a  $R_1$  no utiliza una tercera representación reconocida de la esfera  $E$  como representación intermedia, la transferencia se llama directa. En otro caso la transferencia se llama compuesta.

La transferencia entre dos representaciones de una esfera es un proceso que requiere de la aplicación de un procedimiento que garantice la obtención de una representación desconocida a partir de una conocida. A la primera se le llama representación dada (RD) y a la segunda, representación buscada (RB).

Los conceptos de transferencia directa y de transferencia compuesta son relativos al procedimiento utilizado. Existen casos en que a partir de una representación dada se puede obtener la buscada por transferencia directa o transferencia compuesta. En otros casos solo es posible obtener la representación buscada mediante transferencia compuesta.

En la definición de transferencia entre representaciones de la esfera no se especifica si quien debe realizar la transferencia conoce o no el procedimiento para hacerlo. En el caso del PEA el alumno puede conocer o no el procedimiento. Cuando lo conoce la realización de la transferencia constituye una tarea rutinaria; cuando no lo conoce y está interesado en realizar la transferencia está ante un problema de transferencia entre representaciones de una esfera.

#### Procedimiento para la determinación de las posibles transferencias entre representaciones de una esfera.

La determinación de los casos posibles de transferencia entre representaciones de una esfera en el PEA no puede ser espontánea porque se corre el riesgo de no considerar algunos de ellos. Es por eso que para lograrlo se debe seguir el procedimiento siguiente:

1. Identificar los tipos de sistemas de coordenadas en que se debe representar la esfera en el PEA.
2. Determinar los casos posibles de tipos de transferencia entre representaciones de la esfera, según el sistema de coordenadas.
3. Determinar los tipos de representación de la esfera para cada tipo de sistema de coordenadas.
4. Determinar las formas reconocidas de representación de cada tipo.

5. Determinar los casos posibles de las transferencias intratipo y transferencias intertipos en el mismo sistema de coordenadas.
6. Determinar los casos posibles de las transferencias intersistemas.

A continuación se explican cada una de las fases del procedimiento descrito anteriormente.

1. Identificar los tipos de sistemas de coordenadas en que se debe representar el objeto en el PEA.

En el PEA de la Geometría Analítica la esfera se debe representar en coordenadas cartesianas rectangulares, en coordenadas cilíndricas y en coordenadas esféricas.

2. Determinar los casos posibles de tipos de transferencia entre representaciones de la esfera, según el sistema de coordenadas.

Al considerar los tipos de sistemas de coordenadas en que se debe representar la esfera en el PEA y aplicando la regla del producto de la combinatoria resultan nueve casos posibles. En tres de estos es posible la transferencia intrasistema, los seis restantes corresponden a transferencias intersistemas (Tabla 1).

**Tabla 1. Casos posibles de tipos de transferencia entre representaciones de la esfera según el tipo de sistema de coordenadas.**

Tabla 1		
No.	Transferencia	Tipo de transferencia posible
1	Cartesiano→Cartesiano	Intrasistema e intersistemas
2	Cartesiano→Cilíndrico	Intersistemas
3	Cilíndrico→Cartesiano	Intersistemas
4	Cartesiano→Esférico	Intersistemas
5	Esférico→Cartesiano	Intersistemas
6	Cilíndrico→Cilíndrico	Intrasistema e intersistemas
7	Cilíndrico→Esférico	Intersistemas
8	Esférico→Cilíndrico	Intersistemas
9	Esférico→Esférico	Intrasistema e intersistemas

La flecha representa la transferencia, la palabra que la antecede el tipo de sistema de coordenadas de la representación dada y la palabra a su derecha el tipo de sistema de coordenadas de la representación buscada.

El programa de la asignatura no incluye los casos 6, 7, 8 y 9 cuyo estudio no es necesario, incluye las transferencias intrasistema solo en sistemas de coordenadas rectangulares y el estudio de las transferencias intersistemas, con excepción de las etiquetadas con el 1, se concibe solo cuando el sistema de coordenadas de la RD es de un tipo diferente al de la RB.

Los casos etiquetados con 2, 3, 4 y 5 se desdoblán en dos, según los sistemas de coordenadas estén asociados o no. El programa de la asignatura establece que solo se estudien los casos en que los sistemas de coordenadas estén asociados.

Por ejemplo, para resolver la tarea siguiente es necesario realizar una transferencia intersistemas que corresponde al caso 5 de la Tabla 1.

Las esferas siguientes están dadas en un sistema de coordenadas esféricas: a) ; b) . Determina sus ecuaciones en el sistema de coordenadas cartesianas rectangulares asociado.

3. Determinar los tipos de representación de la esfera para cada sistema de coordenadas:

En el estudio analítico de la esfera que se realiza en la formación de profesores de Matemática en Cuba, se identifican como tipos fundamentales de representación en sistemas cartesianos rectangulares el verbal, el gráfico y el analítico. En sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas las representaciones son de tipo gráfico y de tipo analítico.

4. Determinar las formas de representación reconocidas de cada tipo:

Existen diferentes formas de representación analítica y de representación verbal para cada sistema de coordenadas cartesianas rectangulares (Tabla 2).

**Tabla 2. Tipos y formas de representación reconocidas de la esfera.**

Tipo de representación	Forma de representación
Representación verbal	1) Frase con el centro y el radio de la esfera, 2) frase con el centro y un punto de la esfera, 3) frase con los extremos de un diámetro de la esfera, 4) frase con el centro y la ecuación de un plano tangente a la esfera.
Representación analítica	1) Ecuación general y 2) ecuación ordinaria.
Representación gráfica	Es única para cada sistema de coordenadas.
La ecuación ordinaria es de la forma	$(x - h)^2 + (y - k)^2 + (z - l)^2 = r^2$ (r>0)

Una de las dificultades que se presentan cuando se pretende identificar las transferencias posibles es que no se dispone de un análisis previo de los tipos y formas de representación de la esfera en sistemas de coordenadas cilíndricas. En la bibliografía consultada solo se exponen representaciones analíticas de la esfera.

Al realizar un análisis de los tipos y formas de representación de la esfera en un sistema de coordenadas esféricas se obtienen resultados similares a los expuestos para los sistemas de coordenadas cilíndricas.

- Determinar los casos posibles de las transferencias intratipo y transferencias intertipos en el mismo sistema de coordenadas:

**Casos posibles de transferencias entre representaciones verbales de una esfera.**

Para la esfera se han considerado cuatro formas; utilizando la regla del producto de la combinatoria se obtienen 12 casos posibles de transferencias entre representaciones del tipo verbal.

Si se etiquetan las formas de representación con siglas y utiliza una flecha como símbolo de la transferencia, se pueden representar los 12 casos de transferencias entre representaciones verbales (Tabla 3).

**Tabla 3. Casos posibles de transferencia entre representaciones verbales.**

Rep. dada: CR	Rep. dada: CP	Rep. dada: ED	Rep. dada: CT
1) CR→CP 2) CR→ED 3) CR→CT	4) CP→CR 5) CP→ED 6) CP→CT	7) ED→CR 8) ED→CP 9) ED→CT	10) CT→CR 11) CT→CP 12) CT→ED
Etiquetas: CR: esfera representada verbalmente por el centro y el radio. CP: esfera representada verbalmente por el centro y uno de sus puntos. ED: esfera representada verbalmente por los extremos de un diámetro. CT: esfera representada verbalmente por el centro y un plano tangente.			

**Casos posibles de transferencias entre representaciones analíticas de una esfera.**

Con razonamientos análogos a los realizados en el caso de representaciones verbales, resulta que existen dos casos de transferencias entre representaciones analíticas que son: 13) EG→EO y 14) EO→EG, considerando las etiquetas EG: esfera representada por su ecuación general y EO: esfera representada por su ecuación ordinaria.

Ahora se determinan los casos posibles para transferencias intertipos.

**Casos posibles de transferencias intertipos a partir de una representación verbal de una esfera.**

Si se aplica el mismo razonamiento a las transferencias en que la representación dada es verbal y la buscada es analítica, resultan 8 casos posibles (Tabla 4).

**Tabla 4. Casos posibles de transferencia de una representación verbal a una analítica.**

Rep. dada: CR	Rep. dada: CP	Rep. dada: ED	Rep. dada: CT
15) CR→EO 16) CR→EG	17) CP→EO 18) CP→EG	19) ED→EO 20) ED→EG	21) CT→EO 22) CT→EG
Etiquetas: se utilizan las etiquetas de la Tabla 3.			

Como existe una única representación gráfica de una esfera para cada sistema de coordenadas, existen cuatro casos posibles de transferencias de una representación verbal a una gráfica. Si se denota la representación gráfica por G, estos son los casos: 23) CR→G, 24) CD→G, 25) ED→G y 26) CT→G.

**Casos posibles de transferencias intertipos a partir de una representación analítica de una esfera.**

Existen 8 casos posibles de transferencias en que la representación dada es analítica y la buscada es verbal (Tabla 5).

**Tabla 5. Casos posibles de transferencia de una representación analítica a una verbal.**

Rep. dada: EO	Rep. dada: EG
27) EO→CR 28) EO→CP 29) EO→ED 30) EO→CT	31) EG→CR 32) EG→CP 33) EG→ED 34) EG→CT
Etiquetas: Se utilizan las etiquetas de la Tabla 3.	

Existen dos casos posibles de transferencias de una representación analítica a una gráfica. Si se utilizan las etiquetas introducidas, estos son: 35) EO→G y 36) EG→G.

**Casos posibles de transferencias a partir de una representación gráfica de una esfera.**

Existen cuatro casos posibles de transferencias en que la representación dada es gráfica y la buscada es verbal. Estos son: 37) G→CR, 38) G→CP, 39) G→ED y 40) G→CT.

Existen dos casos posibles de transferencias en que la representación dada es gráfica y la buscada es analítica. Estos son: 41) G→EO y 42) G→EG.

## 6. Determinar los casos de las transferencias intersistemas.

### *Casos posibles de transferencias en las que ambos sistemas son cartesianos rectangulares.*

Todas las transferencias identificadas en el quinto paso de este procedimiento son posibles siempre que se precise la relación que existe entre los dos sistemas de coordenadas, por ejemplo que el sistema de la RB se obtiene del sistema de coordenadas de la RD por una traslación de los ejes coordenados, según el vector  $\vec{O}$ , donde O denota el origen del sistema de coordenadas de la RD y C el centro de la esfera.

Un análisis más preciso debe permitir identificar las transferencias que pueden resultar más útiles por sus aplicaciones en otras disciplinas, como es el caso de Análisis Matemático.

### *Casos posibles de transferencias en las que la RD es referida a un sistema cartesiano rectangular y la RB a uno cilíndrico.*

Introduciendo la etiqueta RAC para la representación analítica de la esfera en coordenadas cilíndricas se obtienen las siguientes transferencias intersistemas<sup>1</sup>: 43) EG→RAC, 44) EO→RAC.

### *Casos posibles de transferencias en las que la RD es referida a un sistema cilíndrico y la RB a uno cartesiano rectangular.*

Las transferencias posibles son: 45) RAC→EG, 46) RAC→EO y 47) RAC→G.

### *Casos posibles de transferencias en las que la RD es referida a un sistema cartesiano rectangular y la RB a uno esférico.*

Si se introduce la etiqueta RAE para la representación analítica de la esfera en coordenadas esféricas se tiene las transferencias siguientes: 48) EG→RAE y 49) EO→RAE.

### *Casos posibles de transferencias en las que la RD es referida a un sistema esférico y la RB a uno cartesiano rectangular.*

Las posibles transferencias son: 50) RAE→EG, 51) RAE→EO y 52) RAE→G.

### *Ejemplos de tareas para el desarrollo de la habilidad relativa a la transferencia entre representaciones de la esfera.*

El conjunto de tareas de aprendizaje que contiene este artículo tiene como característica fundamental que incluye todos los casos de transferencia intrasistema entre representaciones de una esfera en coordenadas cartesianas, que es una limitación de la bibliografía sobre geometría analítica utilizada en la formación de profesores de Matemática.

Además de este atributo las tareas elaboradas tienen las características siguientes:

- Permiten la fijación de los procedimientos para la transferencia entre las representaciones de la esfera.
- Pueden resolverse con lápiz y papel y algunas con la utilización del software GeoGebra.
- Favorecen el desarrollo de las habilidades para comunicarse matemáticamente.

En el conjunto de tareas se identifican cinco subconjuntos, aunque en una tarea pueden existir incisos que corresponden a distintos subconjuntos.

Las tareas del primer subconjunto contribuyen al desarrollo de habilidades para determinar el radio, las coordenadas de los extremos de un diámetro, la ecuación del plano tangente a una esfera y la distancia de un punto a un plano.

Las del segundo subconjunto contribuyen al desarrollo de habilidades para determinar las ecuaciones general y ordinaria de la esfera.

Las del tercer subconjunto contribuyen al desarrollo de habilidades para representar gráficamente una esfera y las del cuarto subconjunto contribuyen al desarrollo de habilidades investigativas en los estudiantes.

Las tareas del quinto subconjunto corresponden a transferencias intersistemas de coordenadas.

Estas tareas son en su mayoría originales y en su elaboración se han consultado libros de geometría analítica reconocidos por la comunidad de profesores de la asignatura (Lehmann, 1972; Kindle, 1976; Kletenik, 1979; Cherbakov, Martínez, Figueras & Cisneros, 1991; Oteyza, Lam, Hernández, Corrales & Ramírez, 2011).

1. Dada la esfera de centro  $C(5; 3; -2)$  y radio  $r=3$ .
  - a. Obtenga representaciones verbales de la esfera dadas por: 1) el centro y un punto, 2) los extremos de un diámetro y 3) el centro y un plano tangente.
  - b. Escriba las ecuaciones ordinaria y general de la esfera.

<sup>1</sup> Solo se hace referencia a las que se han identificado en los textos de geometría analítica.

- c. Representéla gráficamente.
2. Dada la esfera de centro  $C(5; 3;-2)$  que pasa por el punto  $Q(3;2;1)$ .
  - a. Obtenga representaciones verbales de la esfera dadas por: 1) el centro y el radio, 2) los extremos de un diámetro y 3) el centro y un plano tangente.
  - b. Escriba las ecuaciones ordinaria y general de la esfera.
  - c. Representéla gráficamente.
3. Dada la esfera uno de cuyos diámetros tiene por extremos los puntos  $A(2;3;5)$  y  $B(4;1;1)$ .
  - a. Obtenga representaciones verbales de la esfera dadas por: 1) el centro y el radio, 2) el centro y un punto y 3) el centro y un plano tangente.
  - b. Escriba las ecuaciones ordinaria y general de la esfera.
  - c. Representéla gráficamente.
4. Dada la esfera de centro  $C(-4; 2; 3)$  que es tangente al plano  $2x-y-2z+7=0$ .
  - a. Obtenga representaciones verbales de la esfera dadas por: 1) el centro y el radio, 2) el centro y un punto y 3) los extremos de un diámetro.
  - b. Escriba las ecuaciones ordinaria y general de la esfera.
  - c. Representéla gráficamente.
5. Las ecuaciones siguientes corresponden a esferas:
  - a. Transforma las ecuaciones a la forma ordinaria o general, según corresponda.
  - b. Representa cada esfera gráficamente.
  - c. Obtenga representaciones verbales de las esferas dadas por: el centro y el radio, el centro y un punto, los extremos de un diámetro y el centro y un plano tangente.
6. La Figura 1 corresponde a la representación gráfica de una esfera
  - a. Determine su ecuación ordinaria y su ecuación general.
  - b. Obtenga representaciones verbales de la esfera dadas por: el centro y el radio, el centro y un punto, los extremos de un diámetro y el centro y un plano tangente.

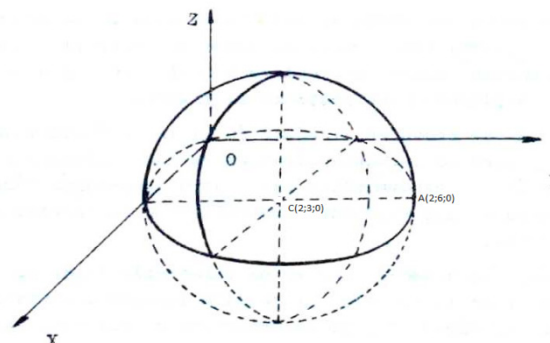


Figura 1

Figura 1. Representación gráfica de una esfera.

7. Dada la esfera  $E$ :
  - a. Determine al menos tres representaciones verbales de la esfera  $E$ .
  - b. Determine no menos de cuatro representaciones verbales del plano  $\alpha$ .
  - c. Determine las ecuaciones paramétricas y canónicas de la recta que contiene al diámetro de la esfera que es perpendicular al plano  $\alpha$ .
8. La esfera  $E$  pasa por los puntos  $A(1,1;1)$ ,  $B(1,2,1)$ ,  $C(1,1;2)$  y  $D(2,1,1)$ . Determine al menos cuatro representaciones verbales de la esfera  $E$ .
9. Determine el volumen y el área total de la esfera cuya ecuación es .
10. Seleccione un libro donde se trate la esfera, escriba una ponencia basada en la respuesta a las preguntas siguientes y elabore su presentación en PowerPoint:
  - a. ¿Cuáles son los tipos y formas de representación que se estudian?
  - b. ¿Cuáles transferencias entre representaciones de la esfera se exponen?
  - c. ¿Cuáles de las posibles transferencias entre representaciones de la esfera estudiadas en la asignatura no se exponen?
  - d. Analice la correspondencia entre las transferencias del inciso b y los ejercicios que en el libro se proponen.
  - e. Analice la correspondencia entre las transferencias del inciso c y los ejercicios que en el libro se proponen.
  - f. Elabore un ejercicio para cada una de las transferencias a las que no les correspondió ningún ejercicio del texto.
  - g. Escoja al menos dos transferencias de las no expuestas en el libro y elabore dos procedimientos de transferencia para cada una de ellas. Cuando sea posible el

uso del software GeoGebra uno de los procedimientos debe incluir el uso de este software.

11. Determine la ecuación de la esfera E: en un sistema de coordenadas cilíndricas.
12. Escriba la ecuación en un sistema de coordenadas cartesianas de las superficies cuyas ecuaciones en un sistema de coordenadas esféricas son: a) , b). Identifique en cada caso la superficie.
13. Determine la ecuación en un sistema de coordenadas esféricas de las superficies cuyas ecuaciones son: a) , b) .

**Experiencia en la utilización de tareas de aprendizaje que exigen transferencia entre representaciones de la esfera.**

Las tareas dirigidas a la fijación de los procedimientos de transferencia entre representaciones de la esfera, se han utilizado por los autores de este trabajo durante tres cursos escolares en el PEA de la asignatura Geometría I (Geometría Analítica), en la formación inicial de profesores de Matemática.

Durante la experiencia se utilizó como variable de estudio la habilidad para la transferencia entre representaciones de la esfera, como unidad muestral el alumno que se forma como profesor de Matemática y como unidad de análisis la tarea de aprendizaje que exige transferencia entre representaciones de la esfera.

La experiencia se desarrolló con 13 alumnos. El análisis de la variable de estudio condujo a la consideración de sus dimensiones cognitivo-procedimental, afectivo-motivacional y comunicacional con sus correspondientes indicadores (Tabla 6).

**Tabla 6. Indicadores de las dimensiones de la habilidad para la transferencia entre representaciones de la esfera.**

Dimensión	Indicadores
Cognitivo-procedimental	1.1. Identificación de la representación dada (RD) y la representación buscada (RB). 1.2. Conocimiento de los pasos del procedimiento. 1.3. Ejecución del procedimiento. 1.4. Comprobación de si la representación obtenida corresponde al objeto geométrico dado. 1.5. Determinación de si la representación obtenida es única.
Afectivo-motivacional	2.1.- Interés por resolver las tareas de las clases prácticas. 2.2.- Perseverancia ante la complejidad de las tareas. 2.3.- Actitud ante las críticas. 2.4.- Estado de ánimo durante la resolución de las tareas.

Comunicacional	3.1. Atención prestada a las explicaciones del profesor. 3.2. Actuación ante las interrogantes formuladas por el profesor. 3.3. Colaboración con los compañeros de clase. 3.4. Atención prestada a las explicaciones de los compañeros de clase. 3.5. Actuación ante las interrogantes formuladas por los compañeros de clase.
----------------	--

Los criterios de medición de los indicadores se organizaron en matrices de valoración (Acuña, 2002) y cada indicador se midió utilizando una escala ordinal de tres valores: bien, regular y mal.

En cada alumno cada indicador se midió con diferentes tareas y en distintos momentos.

Los autores elaboraron un modelo estadístico de la medición basado en medias ponderadas (índices) que permitió obtener una medida única para cada indicador en cada alumno y mediciones individuales de las dimensiones y la variable de estudio.

Los datos se procesaron en un libro Excel 2010 elaborado por los autores.

Los mejores resultados se obtuvieron en los indicadores siguientes:

- Identificación de la representación dada y la representación buscada. En este indicador todos los alumnos fueron evaluados de bien, pues identificaron correctamente la RD y la RB.
- Conocimiento de los pasos del procedimiento. Todos los alumnos fueron evaluados de bien ya que conocían los pasos del procedimiento y el orden en que estos debían ejecutarse.
- Interés por resolver las tareas de las clases prácticas. De los 13 alumnos, 7 (53,8%) fueron evaluados de bien y 6 (46,2%) de regular. Los evaluados de bien comenzaban a resolver las tareas cuando el profesor las orientaba sin necesidad de impulsos y los de regular necesitaban impulsos.
- Atención prestada a las explicaciones del profesor. De los 13 alumnos, 8 (61,5%) fueron evaluados de bien y 5 (38,5%) de regular. Los evaluados de bien atendían voluntariamente y los de regular cuando el profesor lo solicitaba.

Los indicadores donde se obtuvieron los resultados más bajos son:

- Comprobación de si la representación obtenida corresponde al objeto geométrico dado. En este indicador, de los 13 alumnos, 5 (38,4%) fueron evaluados de bien, 4 (30,8%) de regular y 4 (30,8%) de mal. Los evaluados de bien comprobaron y explicaron



correctamente cómo procedieron para comprobar, los de regular comprobaron, pero la explicación fue incompleta y los de mal no comprobaron o lo hicieron de forma incorrecta.

- Actuación ante las interrogantes formuladas por el profesor. En este indicador, de los 13 alumnos, 3 (23,1%) fueron evaluados de bien, 6 (46,2%) de regular y 4 (30,7%) de mal. Los evaluados de bien respondieron correctamente las preguntas formuladas, los de regular lo hicieron con dificultades y los de mal no respondieron o lo hicieron incorrectamente.

Los principales errores cognitivos observados en el desempeño de los alumnos son los siguientes:

- Representación de una esfera mediante un objeto que no la determina de manera única. A este error los autores le han llamado subdeterminación de la representación.
- Representación de una esfera de manera única, pero mediante un objeto que no le corresponde. A este error los autores le han llamado determinación de una representación incompatible.
- Inclusión de características innecesarias en representaciones verbales. A este error los autores le han llamado sobredeterminación de la representación verbal.
- Errores en transformaciones algebraicas de las ecuaciones de las esferas.

## CONCLUSIONES

Los fundamentos teóricos acerca de las representaciones de los objetos geométricos y la transferencia entre representaciones, expuestos en la primera parte de este artículo, han demostrado su utilidad en la determinación de los casos posibles de transferencia entre representaciones de la esfera, los cuales constituyen el punto de partida para la elaboración de tareas de aprendizaje relativas a este proceso.

La determinación de todos los casos posibles de transferencia entre representaciones de la esfera se puede realizar aplicando un procedimiento de seis fases que se inicia con la identificación de los tipos de sistemas de coordenadas en los que se debe representar este objeto en el PEA y termina con la determinación de los casos posibles de las transferencias intersistemas. En las fases intermedias del procedimiento se incluye la determinación de los tipos y formas de representación de la esfera para cada sistema de coordenadas, así como de los casos posibles de transferencia intratipo y de transferencia intertipos en el mismo sistema de coordenadas.

La aplicación de este procedimiento permitió determinar 42 posibles transferencias intrasistema entre las

representaciones de la esfera y elaborar un conjunto de tareas de aprendizaje dirigidas a que los estudiantes fijen los procedimientos de transferencia correspondientes.

La utilización de las tareas elaboradas, en el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Geometría Analítica, ha permitido mejoras en el aprendizaje de los estudiantes de la carrera Licenciatura en Educación, perfil Matemática y Física.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Acuña, E. (2002). Rubistar, herramienta para construir matrices de valoración. Recuperado <https://observatorio.tecedu.uned.ac.cr/matriz-de-valoracion/>
- Cherbakov, S., Martínez, J., Figueras, A., & Cisneros, D. (1991). *Geometría Analítica. Tomo 2*. La Habana: Pueblo y Educación.
- Kindle, J. (1976). *Teoría y problemas de Geometría Analítica*. La Habana: Pueblo y Educación.
- Kletenik, D. (1979). *Problemas de Geometría Analítica*. Moscú: Mir.
- Lehmann, C. (1972). *Geometría Analítica*. La Habana: Pueblo y Educación.
- Oteyza, E., Lam, E., Hernández, C., Corrales, A. & Ramírez, A. (2011). *Geometría Analítica*. Tercera Edición. México: Pearson Edición.
- Quero, O., & Ruiz, A. (2015). *Procedimientos para la transferencia entre representaciones verbales del plano*. Ponencia. Evento internacional *Yayabociencias 2015*. Sancti Spiritus, Cuba.
- Quero, O., & Ruiz, A. (2016a). La transferencia entre representaciones verbales de las secciones cónicas en la formación inicial del profesor de matemática. *Pedagogía y Sociedad*, 19 (47). pp. 19-37. Recuperado de <http://revistas.uniss.edu.cu/index.php/pedagogia-y-sociedad>.
- Quero, O., & Ruiz, A. (2016b). *La transferencia entre representaciones de la esfera en la formación inicial del profesor de matemática*. II Jornada Científica internacional del Cecess. Universidad José Martí Pérez. Sancti Spiritus.