Fecha de presentación: abril, 2014 **Fecha de aceptación:** mayo, 2014 **Fecha de publicación:** junio, 2014

EJERCICIOS PARA EL TRATAMIENTO DE LA TEORÍA COMBINATORIA EN LA ESCUELA PRIMARIA
EXERCISES FOR THE TREATMENT OF COMBINATORIAL THEORY IN ELEMENTARY SCHOOL

MSc. María del Carmen Reyes Vázquez[1]
MSc. Carmen Marina Varela Ávila[1]
[1]Universidad de Ciencias Pedagógicas "Conrado Benítez García". Cienfuegos. Cuba.

¿Cómo referenciar este artículo?

Reyes Vázquez, M. C., & Varela Ávila, C. M. (2014). Ejercicios para el tratamiento de la teoría combinatoria en la escuela primaria. *Revista Conrado* [seriada en línea], 10 (45). pp. 18-26. Recuperado el día, mes y año, de http://conrado.ucf.edu.cu/

RESUMEN
El tratamiento de los ejercicios con ideas combinatorias no constituyen un complejo de materia dentro de la enseñanza de la Matemática que se trabaja en la Escuela Primaria, sino que se integran dentro de otros contenidos y se trabajan de forma intuitiva; su solución se realiza por referencias lógicas (tanteo o conteo), fortaleciendo el pensamiento lógico y reflexivo de los estudiantes. El presente artículo tiene como objetivo ofrecer al maestro de primaria un sistema de ejercicios con carácter combinatorio, lo cual se considera que contribuirá a la comprensión, interpretación y aplicación de los ejercicios combinatorios a los cuales diariamente se enfrenta el maestro en su labor profesional.

Palabras clave:
Combinatorias. Matemática, educación primaria, referencias lógicas.

ABSTRACT
The treatment of the exercises with combinatory ideas doesn't constitute a complex matter inside the teaching of the Mathematics that is employed in the primary school, but rather they are integrated inside other contents and are worked in an intuitive way; it solution is carried out for logical references (or counting), strengthening the logical and reflexive thought of the students. The present article has as objective to offer to the teacher of primary a system of exercises with combinatory character , that which is considered that will contribute to the understanding, interpretation and application of the combinatory exercises to those which daily the teacher faces in his professional work.

Keywords:
Combinatorial, Logical references, Education primary

INTRODUCCIÓN
La combinatoria es la rama de las matemáticas que estudia las posibles agrupaciones de objetos tomados de un conjunto dado; es de gran importancia en otras ramas de las matemáticas. Por ejemplo, se utiliza para el desarrollo del binomio de Newton; en la teoría de la probabilidad y en estadística (para calcular el número de casos posibles de un sistema). También tiene importantes aplicaciones en el diseño y funcionamiento de ordenadores o computadoras, así como en las ciencias físicas y sociales. De hecho, la

teoría combinatoria es de gran utilidad en todas aquellas áreas en donde tengan relevancia las distintas maneras de agrupar un número finito de elementos. El objetivo matemático está caracterizado por: Determinar qué posibilidades hay, para elegir u ordenar elementos de un conjunto finito, según determinadas condiciones y determinar cuántas posibilidades existen.

Las variaciones, permutaciones y las combinaciones son distintas maneras de agrupar objetos. Si una persona saca dos bolas, de una en una, de una mesa de billar americano con tres bolas, hay seis posibles variaciones. En este caso el orden es importante, y es diferente elegir una bola azul y después una roja que una roja y luego una azul. Sin embargo, en las combinaciones el orden no importa y es la misma combinación sacar una bola roja y después una azul que al contrario. Por tanto, solo hay tres posibles combinaciones.

DESARROLLO

Las tres maneras de agrupar objetos:

Variaciones

Las variaciones se debe concebir como una palabra que se utiliza para denominar una forma de elección o de ordenamiento o sea son agrupaciones ordenadas de objetos de un conjunto. Por ejemplo, si se toma una baraja con cuarenta cartas, cada una de las distintas formas en que se pueden repartir 4 cartas es una variación de las 40 cartas tomadas de cuatro en cuatro. El número de variaciones de n elementos tomados de k en k se denota Vn, k, cuyo valor viene dado por la fórmula general:

$$V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!}$$

donde n! —leído 'n factorial'— representa el producto de todos los enteros positivos de 1 a n, siendo 0! = 1 por definición.

Permutaciones

Las permutaciones son las distintas formas en que se pueden ordenar los n elementos de un conjunto. Si se toma una baraja que solo tenga una sota (S), un caballo (C), un rey (R) y un as (A), cada una de las formas en que estas cartas se pueden repartir es una permutación. En este ejemplo hay 24 posibilidades: SCRA SCAR SRAC SRCA SACR SARC CSRA CSAR CRAS CRSA CASR CARS RCSA RCAS RSAC RSCA RACS RASC ACRS ACSR ARSC ARCS ASCR ASRC. El número de posibles permutaciones se puede calcular observando lo que ocurre al repartir las cartas: la primera carta repartida puede ser una de las 4 posibles cartas, la segunda es una de las tres restantes, la tercera es una de las dos posibles y finalmente solo queda una cuarta carta. Esto da un número total de permutaciones igual a $4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$, que se puede escribir como 4!. En general, hay n! permutaciones en las que colocar n elementos en orden.

El número de permutaciones de n elementos se denota Pn. Las permutaciones son un caso particular de las variaciones Pn = Vn, n = n! cuando el número de elementos del conjunto de objetos es igual al de cada uno de los conjuntos ordenados.

Combinaciones

Las combinaciones son agrupaciones de objetos en las que no importa su orden. Siguiendo con el ejemplo del reparto de cartas, normalmente no importa el orden en que se reciben éstas. El número de posibles combinaciones de la mano recibida por un jugador es igual al número de variaciones en que las cartas se podían haber repartido, dividido por el número de posibles formas de ordenar la mano. Por ejemplo, hay V40, 4 formas de repartir 4 cartas de una baraja de 40, y hay P4 de ordenar dichas cartas. Por tanto, hay V40, 4/P4 posibles combinaciones. En general, el número de combinaciones de n elementos tomados de k en k se escribe Cn,k, y su valor está dado por la siguiente fórmula:

$$V_{n,\,k} = \frac{n!}{k!\;(n-k)!}$$

Para resolver ejercicios con ideas combinatorias no existe un argumento determinado sino que se van solucionando por referencias lógicas (tanteo o conteo), pero debe tenerse presente que los maestros deben poseer conocimientos superiores a los de los alumnos, de ahí que tengan que predeterminar todas las soluciones y problemas.

Seguidamente se hará referencia a los principios y a su ejemplificación:

Principios.

1. Aditivo o regla de la suma.
2. Multiplicativo o regla del producto.

Principio aditivo.

- El número total de combinaciones que se pueden hacer con todas las clases de elementos de un conjunto, es igual a la suma de los números de las combinaciones de cada una de las clases.

  Nota: se entiende como clase a todos los subconjuntos que se forman con los elementos del conjunto en cuestión.

  Ejemplo: Anabel tiene 3 sayas y 5 blusas. ¿De cuántas maneras puede Anabel combinar las sayas y las blusas

S_1	B_1	S_2	B_1	S_3	B_1
	B_2		B_2		B_2
	B_3		B_3		B_3
	B_4		B_4		B_4
	B_5		B_5		B_5

Se forman tres clases con cinco combinaciones 5+5+5=15

Principio multiplicativo

Si una cosa cualquiera puede recurrir de m maneras diferentes y si después de haber ocurrido una cualquiera de esas maneras, otra cosa puede ocurrir de n maneras diferentes, entonces las dos cosas, en ese orden, pueden ocurrir de m. n maneras.

Ejemplo: (Se trabaja con el ejemplo anterior)

Sayas: 3 m

Blusas: 5 n

m. n = 3. 5 = 15

En Primaria los ejercicios con ideas combinatorias se resuelven por conteo. Para ello es importante darles métodos a los alumnos para que no pierdan soluciones por lo que resulta necesario seguir un determinado orden.

Ejemplo: Numeración.

- Trazar rayitas que indiquen las cifras del número.

- Si conocemos algún número, lo escribimos en el lugar (rayitas) correspondiente a (unidad, decena, centena….)
- Formar los números ordenadamente.

  Ejemplo: ¿Cuántos números de dos cifras (sin repetición) se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5?

  Total de dígitos: 5. (Se pueden formar cinco clases. Si fijamos uno lo podemos combinar con los cuatro restantes (4 combinaciones) por tanto aplicando el principio aditivo.

12	21	31	41	51
13	23	32	42	52
14	24	34	43	53
15	25	35	45	54

4+4+4+4+4=20

Aplicando el principio multiplicativo

Son 5 dígitos $m = 5$

Si fijo 1 puedo combinarlo con los 4 restantes por tanto $n = 4$

$m \cdot n = 5 \cdot 4 = 20$.

A continuación se hará referencia al plan de solución para ejercicios combinatorios que primeramente serán enunciados y después ilustrados.

Para responder a las preguntas: cuáles posibilidades existen? y cuántas posibilidades existen?, se tiene en cuenta el siguiente plan de solución:

1. ¿Cuáles son los dos conjuntos?
2. Qué conjunto se encuentra arriba?

De cada elemento del conjunto debe partir una flecha.

3. ¿Qué conjunto se encuentra debajo?

Pueden quedar algunos elementos sin que lleguen a ellos flechas.

Se denotan ambos conjuntos.

4. ¿Qué ordenamientos son posibles?
   a) ¿Pueden contarse las flechas?
      Sí - teniendo en cuenta el orden - variaciones.
      No - sin tener en cuenta el orden - combinaciones
   b) ¿Pueden dirigirse varias flechas hacia un elemento del conjunto que se encuentra debajo?
      Sí - con repetición
      No - sin repetición

Ejemplo:

¿En cuáles y de cuántas maneras se pueden distribuir x palomas que no se diferencien en m árboles?

1. ¿Cuáles son los dos conjuntos? – Conjunto de palomas y conjuntos de árboles.
2. ¿Qué conjunto se encuentra arriba? – el conjunto de palomas
   De cada elemento del conjunto debe partir una flecha.
   ¿Qué conjunto se encuentra debajo? – el conjunto de árboles
   Pueden quedar algunos elementos sin que lleguen a ellos flechas.

Se denotan ambos conjuntos. – A es el conjunto de las palomas y B el de los árboles.

3. ¿Qué ordenamientos son posibles?
   a) ¿Pueden contarse las flechas?

No; pues si dos palomas están posadas en distintos árboles, cambian sus lugares la distribución obtenida no es diferente de la anterior. Se trata de un problema de combinaciones

a) ¿Pueden dirigirse varias flechas hacia un elemento del conjunto que se encuentra debajo?
   Sí; pues en un árbol se pueden posar varias palomas. Se trata de un problema de combinaciones con repetición.

Ejercicios que se pueden trabajar.

Ejercicio 1:

En una reunión de 18 personas todas se saludan entre sí y ningún par de personas se saludan más de una vez. ¿Cuántos saludos de manos se dan?

Total de personas	m = 18	m. n = 18. 17
Saludos (cada persona)	n = 17	= 306

Pero como cada persona al saludar a otra, ese saludo a la inversa no se repite, entonces 306: 2 = 153 saludos.

Ejercicio 2:

a) ¿Cuántos números de dos dígitos pueden formarse con las cifras 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7?
b) ¿Cuántos de ellos tienen sus cifras iguales?
   Solución:
   a) m = 7 n = 7 m. n = 7. 7 = 49
   b) m = 7 n = 1 m. n = 7. 1 = 7

Ejercicio 3:

a) ¿Cuántos números de tres dígitos pueden formarse con las cifras: 2, 4, 3, 5, 6?
b) ¿Cuántos de ellos son pares?

Solución

a) $\underset{m}{\_\_}\ \underset{n}{\_\_}\ \underset{p}{\_\_}$ m = 5 n = 5 p = 5
m. n . p = 5. 5. 5 = 125

b) $\underset{m}{\_\_}\ \underset{n}{\_\_}\ \underset{p}{\_\_}$ m = 5 n = 5 p = 3
m. n . p = 5. 5. 3 = 75

Ejercicio 4:

¿Cuántos números de 3 cifras no repetidas hay que comiencen por 23? Escríbelas.

Respuesta: Dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

Debemos suprimir 2(el dos y el tres) porque no pueden repetirse las cifras; luego que dan 8; entonces $\boxed{m = 8}$

$\underline{\ 2\ }\ \ \underline{\ 3\ }\ \ \underline{\quad}$

Con cada dígito se tiene una posibilidad, luego n = 1

Primero se selecciona m y luego n quien indica las veces que m puede hacerse.

De aquí que ambas puedan hacerse de m. n maneras diferentes.

m. n = 8. 1 = 8

230	235	238
231	236	239
234	237	

Ejercicio 5:

Los números 2, 3, 4, y 5 se pueden multiplicar unos con otros en diferente orden. ¿Cuáles son las posibilidades que hay considerando el 2 como primer factor? Calcula en cada caso.

Análisis

Tenemos fijo el 2. Consideramos entonces solamente las cifras 3, 4, 5. Cantidad de elementos con que contamos: 3

m = 3

Si fijamos cualesquiera de las otras tres cifras, nos damos cuenta que las combinaciones deben ser realizadas con dos posibilidades, luego n = 2

Ejercicio 6:

¿Cuántos y cuáles números de 4 cifras no repetidas hay que:

a) Tengan un cero en el lugar de las decenas y terminen en uno?

___ ___ _0_ _1_

Colocamos los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. ¿Cuáles son los números con los que podemos operar? 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. m = 8

¿Cuántas posibilidades han de operar con cada uno de ellos?

n = 7, porque al fijar siempre uno quedarían 7.

Por tanto m. n = 8. 7 = 56

8 clases con 7 posibilidades

2301	3201	4201	5201	6201	7201	8201	9201
2401	3401	4301	5301	6301	7301	8301	9301
2501	3501						
2601	.	.	.	.	.	.	.
2701	.	.	.	.	.	.	.
2801	.	.	.	.	.	.	.
2901	3901	4901	5901	6901	7901	8901	9801

Se establece un orden comenzando por el menor dígito

b) Tengan dos centenas, 3 decenas y 5 unidades.

¿Cuántos elementos tenemos para operar?

____ _2_ _3_ _5_

0, 1, **2, 3**, 4**, 5**, 6, 7, 8, 9, m = 6

¿Cuántas veces podemos operar con cada uno?

n = 1

Por tanto m. n = 6. 1 = 6

1 235	6 235	8 235
4 235	7 235	9 235

c) Tengan 1 unidad de millar y 2 decenas.

Solución: 0, **1, 2,** 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Por tanto m = 8 porque ya el 1 y el 2 son fijos.

1 __ 2 __ ¿Cuántas veces con cada uno? -n = 7 porque si fijamos uno quedan 7 dígitos.

m. n
8. 7 = 56

1023	1320	1420	1520	1620	1720	1820	1920
1024	1324	1423	1523	1623	1723	1823	1923
1025	1325	1425	1524	1624	1724	1834	1924
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.
1029	1329	1429	1529	1629	1729	1829	1928

d) Tengan un cero en el lugar de las centenas y en el de las unidades.
__ 0 __ 0 No se pueden formar porque no se cumpliría con la orden dada. Pues el cero aparece repetido.

Ejercicio 8:

Escribe con los dígitos 1, 6 y 8, sin repetición, todos los números de tres cifras menores que 700 que sean divisibles por: a) 2 b) 3 c) 5 d) 7

Solución: ¿Con cuántos elementos contamos para operar? _ Con tres m = 3
¿Cuántas posibilidades hay en cada caso? _ Hay dos n = 2
Por tanto m. n = 3. 2. = 6 168 618 816
186 681 861 ¿Terminamos? _ No, debemos escoger los que sean menores que 700.

168 **618**
186 **681** . Ahora analizamos los que cumplen con las reglas de divisibilidad.

Divisibles por dos: 168, 186 y 618
Divisibles por tres: 168, 186, 618 y 681.
Divisibles por 5: ninguno.
Divisibles por 7: 168

Ejercicio 8:

Escribe todos los números de cuatro cifras diferentes, sin que estas se repitan con los dígitos 0, 3, 5, 4. Que sean divisibles por

Solución. ¿Qué debemos obtener? _ Números de 4 cifras diferentes sin repetición.
¿Cuáles son los elementos con que tenemos que operar? __ 0, 3, 5, 4. Por tanto m = 3, porque con el cero no puede comenzar ningún número de 4 lugares.
¿Cuántas veces podemos operar con cada uno? 3 0 _ _.
Si fijamos el 3 nos quedan tres cifras para intercambiar pero para operar debemos fijar otra y nos quedan 2. Luego n = 3. 2 = 6 m. n
3. 6 = 18

3045	4035	5034
3054	4053	5043
3405	4305	5304
3450	4350	5340
3504	4503	5403
3540	4530	5430

Una vez obtenidos los números se realiza el análisis de la divisibilidad.

Ejercicio 9:

Escribir todos los números de tres lugares que empiecen con 4 sin que se repitan las cifras.

Solución. ¿Cuáles son los elementos con que contamos? _ 0, 1, 2, 3,4, 5, 6, 7, 8, 9.

4 _ _ _ m = 9 n = 8 m. n = 9. 8 = 72

<u>Ejercicio 10:</u>

¿Cuántos números de 4 lugares hay donde el 0 ocupe el lugar de las centenas sin que se repita ninguna cifra? Escribe 7 de ellos.

Solución

Dígitos: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

_ _ _ _
m n p q

_ 0 _ _

Como el cero está fijo en las centenas quedan 9 dígitos, además ningún número natural de 4 lugares puede empezar por cero, entonces m = 9.

Si fijamos el uno en los millares, podrían combinarse en las decenas 8 dígitos y si fijamos el dos en las decenas quedarías siete dígitos para combinar, luego

n = 8 .7 = 56. Aplicando el principio multiplicativo tenemos, m.n=9.56= 504. Respuesta. Hay 504 números de 4 lugares que tienen cero en las centenas

Seis de esos números son: 1023 1’024 1025 1026 1032 1042 1052 1062

<u>Ejercicio 11:</u>

¿Cuántos y cuáles números de 6 lugares se pueden formar con los dígitos 0, 4, 6, 7, 8, 9 sin repetición? Escribe 6.

Solución

Elementos con los cuales tenemos que operar: 0, 4, 6, 7, 8, 9. (Sin repetición)

_ _ _ _ _ _ m = 5

n = 6 .5 .4. 3. 2 .1

n = 720 m. n = 5. 720 = 3 600

Se podrán escribir 3 600 números.

Seis de esos números son: 102345, 102354, 102543, 102534, 102453, 102346

<u>Ejercicio 12:</u>

¿De cuántas maneras se pueden disponer los jugadores de baloncesto?

Solución.

Los jugadores de un equipo de baloncesto son 5: 1, 2, 3,4, 5. Son 5 posiciones. Por tanto m = 5.

_ _ _ _ _

1 _ _ _ _
1 2 _ _ _

Si fijamos uno, nos quedarían 4 jugadores para cambiar en las demás posiciones. Luego n = 4; pero si fijamos otro jugador nos quedarían 3 jugadores para cambiar. Por tanto n = 4. 3, quedando solo 2 jugadores para cambiar, luego n = 4. 3. .2 .l = 24

Aplicando el principio multiplicativo tenemos: m. n = 5. 24 = 120 maneras.

Los ejercicios anteriores contienen algunos puntos de vista importantes para una posible clasificación:

1- Se puede utilizar todos los elementos de cada uno de los conjuntos dados para formar agrupaciones o solo algunos de ellos.
2- Se pueden repetir los elementos o no.
3- Se debe considerar en las agrupaciones, el orden de los elementos.

En la aplicación de ejercicios combinatorios, deben servir para trabajar las intenciones formativas, además se tiene que responder cuáles y cuántas posibilidades de solución existen. Esto se debe enseñar y reconocer desde los primeros grados. Capacitar a los alumnos para esto, es un punto importante de su formación y educación, es una de las tareas centrales de la combinatoria.

CONCLUSIONES

La combinatoria facilita el logro de la disciplina del pensamiento, y contribuye a enseñar métodos del pensamiento que son típicos de la matemática, con respecto a esto Chintschin precisó que la exigencia de realizar diferenciaciones complejas a partir de la consideración de todas las formas posibles de la situación del objeto de análisis, no es solo una parte necesaria del pensamiento matemático, sino de todo pensamiento correcto.

BIBLIOGRAFÍA

Autores, C. d. (2010). *Seminario Nacional para Educadores .* La Habana: MINED.

Baldor, A. (1993). *Aritmética Teórico –práctica 12.* La Habana: Pueblo y Educación.

Bruno, G. (s.f.). *Aritmética Curso Medio.* París: Procuraduría General 78, rue de Sévres.

Marx, S. (/s.n.t/). *Teoría elemental de los números, ecuaciones y combinatorias.*

Ministerio de Educación. (1998). *Programas, libros de texto y orientaciones metodológicas de Matemática de 1ro a 4to grado .* La Habana: Pueblo y Educación.

Ministerio de Educación. (2008). *Programas, Lo esencial en combinatoria.* La Habana: Universitaria.

Pietzsch, G. (1999). *Conferencias sobre Metodología de la Enseñanza de la Matemática 3.* La Habana: Pueblo y Educación.

Ruiz de Ugarrio, G. (1968). *Cómo Enseñar Aritmética en la Escuela Primaria.* La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

Vallejo, J. M. (/s.a/). *Compendio de Matemáticas puras y mixtas.* Madrid: Imprenta Garra Sayaza.