14

Fecha de presentación: mayo, 2016 Fecha de aceptación: julio, 2016 Fecha de publicación: septiembre, 2016

ENTRENAMIENTO PARA CONCURSOS DE MATEMÁTICA. MODELOS DE RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MÁS UTILIZADOS

MATHEMATICAL OLYMPIADS TRAINING. SOLVING PROBLEM`S MODELS MORE USED

MSc. Gustavo Carranza Carpio[1]
E-mail: gcarranza@ucf.edu.cu
Dr.C. Eloy Arteaga Valdés[1]
E-mail: earteaga@ucf.edu.cu
Dr. C. Longino Ramón Muñoz del Sol[1]
E-mail: lrsol@ucf.edu.cu
[1]Universidad de Cienfuegos. Cuba.

¿Cómo referenciar este artículo?

Carranza Carpio, G., Arteaga Valdés, E., & Muñoz del Sol, L. R. (2016). Entrenamiento para concursos de matemática. Modelos de resolución de problemas más utilizados. Revista Conrado [seriada en línea], 12 (55). pp. 99-108. Recuperado de http://conrado.ucf.edu.cu/

RESUMEN

En el Entrenamiento para Concursos de Matemática tiene gran importancia el modelo de resolución de problemas utilizado, este permite explorar, controlar y predecir el proceso. Debido a esto, se pretende con este trabajo realizar una sistematización de los principales modelos de resolución de problemas utilizados en el entrenamiento desde la década de los ochentas a la actualidad. En cada modelo se analizan sus aspectos relevantes y el autor valora sus aportes y carencias. Se presenta con más detalles el modelo de Zeitz por considerarse que en él confluyen de manera acertada los principales aportes de los modelos que le preceden.

Palabras clave:

Modelo, problema, resolución de problemas, modelo de resolución de problemas.

ABSTRACT

The solving problem`s models used is very important to Mathematical Olympiads Training, the model used let control, supervise and predict the procedure. Therefore, the aim of this paper is to systematize the main solving problem`s models used since eighty`s decade to present. Per each model are analyzed its relevant components and the author estimate its contributions and lacks. The Zeitz`s model is showed with more detail because the author consider that in this model flow together the fundamental contributions of precedents models.

Keywords:

Model, problem, solving problems, solving problem's model.

INTRODUCCIÓN

El Entrenamiento para Concursos de Matemática, es un "*proceso extradocente"* (Davidson, 1987, p. 49), con énfasis en el desarrollo de la independencia cognoscitiva creadora de los estudiantes en la resolución de problemas de matemática elemental. Mientras que la independencia cognoscitiva creadora del estudiante es*"la capacidad del alumno para detectar y formular nuevos problemas, de determinar y elaborar, como resultado de un proceso creativo, la vía o las vías que permitan obtener soluciones novedosas y originales; así como, (…) comprobar la pertinencia de las soluciones encontradas".* (Arteaga Valdés, 2003, p. 41)

De aquí que la resolución de problemas y la enseñanza de modelos para resolver problemas, adquieren en el entrenamiento una connotación muy especial. Desde 1980 la resolución de problemas dejó de ser "*un asunto de psicólogos y educadores individuales*". (Delgado Rubí, 1999, p. 17)

Para declararse como un objetivo de enseñanza y es a partir de ese momento en el que empiezan a ganar notoriedad los modelos de resolución de problemas.

En las ciencias se denomina modelo a una *"representación abstracta, conceptual, gráfica o visual (…), física, matemática, de fenómenos, sistemas o procesos a fin de analizar, describir, explicar, simular-en general, explorar, controlar y predecir esos fenómenos o procesos"* (Fundación Wikimedia, 2013).

Luego, una elección acertada del modelo de resolución de problemas a utilizar en el Entrenamiento para Concursos de Matemática permitiría *"explorar, controlar y predecir*" eficientemente el proceso. Por tal motivo, este trabajo pretende sistematizar los principales modelos de resolución de problemas utilizados en los entrenamientos para concursos desde la década de los ochenta.

DESARROLLO

En la transformación histórica de la enseñanza de la resolución de problemas marcan pautas algunos modelos, a los que nos referimos a continuación:

Modelo de George Polya

El modelo conocido internacionalmente como *programa heurístico general* y basado en sus experiencias como matemático y profesor, fue publicado por Polya en 1945 desde posiciones conductistas y para algunos autores, gestaltistas Schoenfeld (1992, p. 17), en su libro *How to solve it*. Pero, en la enseñanza de la Matemática, las ideas de Polya empezaron utilizarse significativamente alrededor de los años ochenta del pasado siglo (Santos Trigo, 1994, p. 18).

Polya propone cuatro etapas:

1. comprensión del problema.
2. concepción de un plan.
3. ejecución del plan.
4. visión retrospectiva.

A cada una de ellas le asocia un conjunto de preguntas o sugerencias que de aplicarse adecuadamente deberían conducir a la solución del problema. Este modelo es muy conocido pues es el que se utiliza en la enseñanza general cubana.

Larson Loren (1983); y Tao (2005), dedicaron obras completas a la ejemplificación práctica de la utilización de las estrategias heurísticas propuestas por Polya.

Algunos autores, sobredimensionan el modelo al asegurar que constituye para el profesor el instrumento universal de dirección, y para el alumno una base de orientación para el trabajo con el problema (Ballester Pedroso, 1992, p. 239). Al parecer esta hiperbolización del modelo, también conocido como Programa Heurístico General, se debe al hecho que se utiliza como guía para la estructuración metodológica de las situaciones típicas de la enseñanza de la matemática en la escuela cubana.

Campistrous & Rizo (1996, pp. 62-63) manifiestan que *"el esquema básico de todos los procesos es el de Polya, pero consideramos que este esquema hay que abrirlo, hay que dar recursos para profundizar en el significado de cada paso y en el qué hacer para lograr la meta".*

Nieto (2004, p. 11), expresa que, *"si bien la mayoría de los matemáticos reconocen en las estrategias heurísticas de Polya los métodos que ellos mismos utilizan habitualmente, no es tan fácil para el que no tiene experiencia aplicarlas exitosamente, en otras palabras, dichas estrategias son más descriptivas que prescriptivas".*

Para Mazarío, et al (2009, p. 6),. "*esta propuesta no indica más que una coincidencia estructural esencialmente formal entre los distintos modelos de resolución de problemas*". No obstante, ese colectivo de investigadores estima que el modelo de Polya está de una manera u otra presente en modelos posteriores y es susceptible de ser enriquecido con nuevos elementos, sin perder la vigencia de su propuesta.

El autor coincide con todos estos investigadores al valorar la importancia del modelo de Polya y al identificar su presencia en casi todos los modelos posteriores pero considera, al igual que Nieto, que este modelo describe de una manera u otra las estrategias utilizadas por un *matemático entrenado* y que en esencia no resulta tan útil para un principiante, por lo que se hace necesario remodelarlo o adaptarlo para los estudiantes noveles en la resolución de problemas. Además este modelo no considera la interrelación con los factores psicosociales e histórico culturales del entorno del estudiante.

Modelo de Mason-Burton-Stacey

Este modelo apareció publicado por primera vez en el texto *Thinking mathematically* (Mason, Burton & Stacey, 1982)

Entre sus características principales se encuentran:

» No hay linealidad en el paso de una fase de la resolución del problema a las demás.

» Conciben el proceso de resolución de problemas de manera dialéctica con avances y retrocesos, lo que distingue este modelo de otros.

» Las características psicológicas de la persona enfrascada en el proceso de resolución constituye otro recurso a utilizar para alcanzar el objetivo.

» Le conceden gran importancia didáctica a la concepción del problema asignándole un enfoque positivo al hecho de no poder avanzar en la resolución del mismo y reforzando la importancia de la fase de revisión.

El modelo trasciende la resolución de problemas al analizar y valorar adecuadamente el pensamiento y la experiencia aportada por la matemática. Muestra una manera de enfocar la vida y potencia el autoconocimiento.

Sin embargo, este modelo se basa en algunos elementos específicos como el de *monitor interior* que en ocasiones constituye un conflicto para los estudiantes con dificultades en la resolución de problemas, sin considerar la importancia que ejercen en esta actividad elementos externos como son el propio profesor y los estudiantes con más experiencias.

Modelo de la resolución de problemas como investigación

» Al analizar la resolución de problemas como investigación, es necesario tener en cuenta algunos aspectos importantes que tienen en cuenta los científicos al resolver un problema.

» *"Resulta indudable que el tratamiento científico de un problema posee unas características generales que habría que tener en cuenta también en los problemas de lápiz y papel".* (Gil & Guzmán, 2004, p. 32)

Inspirados en la idea anterior, Gil & Martínez Torregrosa (1983), publicaron su modelo de resolución de problemas como investigación que ha sido incorporado con posterioridad por otros autores: Bugaev (1987); Gómez (2004); Mazarío (2002); Rodríguez, Ramos & Ilizastigui (2012). Este pretende acercar a los estudiantes en el proceso de resolución de problemas a los modelos de investigación experimental de las ciencias. Inicialmente constaba de siete etapas reducidas a seis por el propio Gil en compañía de Guzmán (2004, pp. 32-36), las que se enumeran a continuación:

I. Considerar cual puede ser el interés de la situación problemática abordada.

II. Aquí se pretende realizar una discusión preparatoria de la situación problemática, conducente a la creación de una concepción preliminar y favorecedora de una actitud más positiva hacia la tarea. Gil & Guzmán explicitan en su trabajo la necesaria aproximación funcional de esta discusión al enfoque de Ciencia Tecnología y Sociedad.

III. Comenzar por un estudio cualitativo de la situación, intentando acotar y definir de manera precisa el problema, explicitando las condiciones que se consideran reinantes, etc.

IV. Esto da un acercamiento al modo de actuación de los científicos ante un problema. Los estudiantes no pueden evitar el análisis cualitativo y son obligados a imaginar necesariamente la situación, a tomar decisiones para acotarla y a explicitar qué es lo que se trata de determinar, etc.

V. Emitir hipótesis fundadas sobre los factores de los que pueden depender los elementos buscados y sobre la forma de esta dependencia, imaginando, en particular, casos límite de fácil interpretación.

VI. La hipótesis desempeña un rol fundamental en la epistemología del proceso de resolución de problemas. El sentido de la orientación científica, aparte del método, está en el movimiento de un pensamiento basado en evidencias a un pensamiento en término de hipótesis, lo que necesita de imaginación y creatividad para formular nuevas posibilidades y de un pensamiento más riguroso para fundamentar primero y probar después lo imaginado, dudar del resultado y hallar la coherencia de las propuestas.

VII. Elaborar y explicitar posibles estrategias de resolución antes de proceder, evitando el puro ensayo y error. Buscar distintas vías de resolución para posibilitar la contrastación de los resultados obtenidos y mostrar la coherencia del cuerpo de conocimientos de que se dispone.

VIII. Las estrategias de resolución son construcciones alternativo-tentativas en el plano intrapsicológico del sujeto que no resultan irreflexivamente de los postulados teóricos. Su génesis está en el planteamiento cualitativo e hipotético formulado y en el cuerpo de conocimientos y experiencias que posee el sujeto del dominio particular, y dependen en gran medida de su imaginación y creatividad.

Su realización presupone la ejecución de un sistema de acciones y operaciones no acabado, un sistema que necesita de la constante verificación de su pertinencia, objetividad y consecuencias para la resolución del problema. Por lo que es importante la búsqueda y construcción de diferentes estrategias, lo que permitirá a la postre, comparar elementos teóricos, principios, procedimientos.

I. *Realizar la resolución verbalizando al máximo, fundamentando lo que se hace y evitando, una vez más, operativismos carentes de significación.*

Con esta etapa se pretende que la resolución esté fundamentada y claramente explicada, previamente o a medida que se avanza, lo que exige verbalización y se aleja de los tratamientos puramente operativos. La verbalización de la solución permitirá además que el tratamiento se mantenga cerca de los principios manejados y facilitará el análisis de los resultados.

II. *Analizar cuidadosamente los resultados a la luz de las hipótesis elaboradas y, en particular, de los casos límite considerados*.

El análisis de los resultados constituye un aspecto esencial en el abordaje de un verdadero problema y supone, sobre todo, su contrastación con relación a las hipótesis emitidas y al corpus de conocimientos. Esto es lo que Polya llama como visión retrospectiva.

Este modelo fue inicialmente concebido para la enseñanza de las ciencias, y de hecho es el aplicado en Cuba para realizar el tratamiento de la resolución de problemas de física (Rodríguez, et al., 2012), pero puede ser extrapolado eficazmente a la enseñanza de la matemática mediante la resolución de problemas.

De este modelo se puede decir que tiene como puntos débiles los siguientes: sus procedimientos tienen una orientación clara hacia la comprensión y el aprendizaje de la metodología de la ciencia, y no tan evidente, hacia el aprendizaje de la propia ciencia; investigadores como Mazarío (2002, p. 39) señalan que *"el trabajo científico se desarrolla en un contexto más amplio y requiere de un mayor esfuerzo y dedicación, sin excluir presiones procedentes del medio social, mayor responsabilidad, recursos, y otras condiciones."*

Modelos de resolución de problemas que consideran las diferencias entre expertos y novatos

Existen otros modelos que toman en consideración cómo se realiza la resolución de problemas por un experto y por un novato.

"Las diferencias que se establecen entre expertos y novatos al enfrentar los problemas es un punto de vista ineludible en los trabajos de investigación" (Mazarío, 2002, p. 34), pues pueden esclarecer elementos esenciales de la problemática que se trata. Originalmente se centró su atención en los estudios conceptuales del aprendizaje como procesamiento de la información y relacionados con el diseño de sistemas informáticos expertos para la solución de problemas específicos (Cuena, 1986). Estos estudios están incluidos en el campo de la Psicología Cognitiva y el objetivo de las investigaciones realizadas es arribar a criterios que posibiliten a los novatos conocer o acceder a formas de actuación eficientes para mejorar su desempeño al resolver problemas.

Los investigadores Glaser (1984); Schoenfeld (1985, 1992); Ausubel (1991); Klingler & Vadillo (1997), coinciden en que las ideas esenciales que se encuentran en la base de todos los análisis comparativos entre expertos y novatos son:

Novatos	Expertos
• Visualizan los componentes de la tarea	• Buscan patrones
• Comienza inmediatamente la resolución	• Dedican de inicio un tiempo para realizar un análisis del problema
• Inseguros al comenzar la resolución	• Muestran seguridad al elegir un punto para comenzar la resolución
• Usualmente desvían su atención a aspectos no esenciales del problema	• Identifican los elementos esenciales del problema y se concentran en ellos
• No tienen bien estructurados sus conocimientos	• Tienen más conocimientos y además bien estructurados
• Creen en lo general, que las habilidades dependen en lo fundamental de factores innatos y las diferencias individuales	• Tienen conciencia de que sus habilidades surgen como resultado de la práctica continuada y el aprendizaje
• No perseveran en la búsqueda de la solución	• Actitudes positivas y optimistas

A medida que aumenta el nivel de complejidad y abstracción de las definiciones y conceptos, se acentúan las dificultades y diferencias entre expertos y novatos.

En relación con este modelo, y a pesar de la información que del mismo es posible obtener, se considera que no se profundiza suficientemente aún en el por qué de las diferencias entre expertos y novatos al resolver problemas, aunque se pueden tener criterios al respecto. No obstante, a partir de tales diferencias se infieren recomendaciones y pasos concretos para acortar la distancia entre un tipo de resolutor y otro. Además, resulta importante acercar a estudiantes a los desempeños de expertos ya sea a través del despliegue por parte del profesor de todas las acciones que inciden en la resolución de un problema o favoreciendo las interacciones con otras personas, propiciando de esta forma que los estudiantes puedan acceder en algún momento a tal condición.

Modelo de Alan H. Schoenfeld

Schoenfeld (1992, pp. 19-20), desde las posiciones del constructivismo y de cierta forma bajo la influencia de los modelos investigativos, propone modificaciones a la propuesta de Polya encaminadas al trabajo con los estudiantes talentosos. Él identifica cinco aspectos cognitivos relevantes que influyen en la resolución de problemas matemáticos:

» Recursos cognitivos (The knowledge base)[1].

» Heurística (Problem solving strategies). Es el conjunto de estrategias y técnicas para resolver problemas que conocemos y estamos en capacidad de aplicar.

» Autorregulación o control (Self-regulation, or monitoring and control). Es la capacidad de utilizar lo que sabemos para lograr un objetivo.

» Creencias y afectos (Beliefs and affects). Se refiere a aquellas creencias y opiniones relacionadas con la resolución de problemas y que pueden afectarla favorable o desfavorablemente.

» Entrenamiento (Practices)

» *Los recursos cognitivos* se refieren a qué información relevante se tiene a mano o se posee de la situación matemática o problema, y como se accede a ella y se usa. Por una parte están los conocimientos matemáticos generales, tanto de conceptos y resultados como de procedimientos (algoritmos); y por la otra están los mecanismos mediante los cuales el individuo puede rescatar de su memoria ese conocimiento. Estos dos elementos aunque están estrechamente relacionados, actúan independientemente uno del otro.

1 Nombres originales.

La importancia de los recursos cognitivos en el proceso de resolución de problemas es obvia. Sin embargo, no siempre es suficiente, poseer un amplio bagaje de conocimientos matemáticos para solucionar un problema. También es necesario dominar técnicas y estrategias que nos ayuden a enfrentar el problema.

La heurística es el conjunto de estrategias y técnicas para resolver problemas que conocemos y estamos en capacidad de aplicar. Schoenfeld, elaboró, al igual que Polya, una lista de las estrategias más utilizadas.

El modelo de este investigador se presenta en tres etapas fundamentales: análisis, exploración y verificación de la solución. Schoenfeld considera que la etapa de la ejecución del plan de solución del modelo de Polya está incluida en su etapa de exploración y a diferencia de este último su última etapa, verificación de la solución, no es realmente un último elemento del proceso de resolución del problema, puesto que está presente en todos los momentos del proceso. Sus investigaciones demostraron que hay una gran diferencia entre expertos y novatos en cuanto al tiempo que dedican a la actividad de verificación de la solución.

El autor ratifica a Mazarío (2002, p. 31), cuando plantea que desde el punto de vista teórico y práctico sus categorías adquieren importancia en la exploración del pensamiento matemático de los estudiantes, favoreciendo actividades donde se propicien la interpretación y búsqueda de soluciones a los problemas, a manera de mostrar la experiencia de los hechos y relaciones matemáticas en una totalidad coherente. Sin embargo considera que como guía práctica para las personas no entenadas tiene aún un carácter muy general, además no es evidente en el modelo el carácter social de esta actividad.

Modelo de Paul Zeitz[2]

Tomando como puntos de partida el modelo de Polya y los que consideran las diferencias entre expertos y novatos, Zeitz (2007), propone un modelo para la resolución de problemas matemáticos basado en las siguientes premisas:

» La resolución de problemas puede ser enseñada y aprendida.

» El éxito en la resolución de problemas depende fundamentalmente de factores psicológicos. Cualidades

2 Integrante del primer equipo de los Estados Unidos de Norteamérica en participar en las Olimpiadas Internacionales de Matemática y miembro del colectivo de entrenadores de estos equipos desde 1994, director del seminario de resolución de problemas de la Universidad de San Francisco desde 1992, investigador del Instituto de Investigaciones de las Ciencias Matemáticas desde 1997.

como la imaginación, la creatividad, la confianza en sí mismos, la concentración y la osadía son de vital importancia.

- No mantener barreras en la investigación del problema, es cuando menos, un importante y riguroso argumento.
- Los aspectos no psicológicos de la resolución de problemas son una mezcla de principios estratégicos, métodos tácticos focalizados y herramientas técnicas minuciosamente definidas.
- El conocimiento matemático acumulado por el individuo es tan importante como el domino de las herramientas técnicas (Zeitz, 2007).

El modelo propuesto por este investigador opera en tres niveles:

Estratégico: aquí actúan las ideas psicológicas y matemáticas para comenzar y dar seguimiento a la resolución del problema, en dos etapas fundamentales (2007, p. 13):

1. *La investigación*: en la que se descubre que continúa.
2. *La argumentación*: en la que se demuestra a otros lo descubierto.

Táctico: métodos matemáticos que son funcionales en escenarios de diversa índole.

Herramental: técnicas minuciosamente focalizadas y trucos o artilugios para situaciones específicas.

Él explica que en un primer momento el trabajo en la resolución del problema se debe encaminar en un nivel estratégico, analizando el problema de manera general, desde variados puntos de vista sin restar importancia a ninguna idea por más alocada que parezca. El pensamiento estratégico tiene como objetivo la creación de planes generales de solución sin detallar en los componentes matemáticos. Además enumera un conjunto de estrategias que es posible utilizar en el nivel estratégico:

1. *Estrategias psicológicas*

Basadas en las fortalezas mentales:

Aquí influyen un conjunto de elementos psicológicos (autoestima, confianza en sí mismo, poder de concentración, constancia, creencias) necesarios para enfrentar la resolución de cualquier problema y que son factibles de modificación y/o desarrollo.

a. Desafíe y flexibilice sus propios límites cultivando una actitud optimista y abierta.

b. Sólo porque un problema parezca imposible no significa que lo sea. Nunca admita la derrota después de una primera ojeada. Comience con optimismo y asuma que el problema puede ser resuelto. Sólo después de varios intentos fallidos asuma la imposibilidad y trate de demostrarla. Si no lo logra, tampoco admita la derrota. Regrese sobre el problema más tarde.

Basadas en la creatividad:

a. Aprende a apropiarte desvergonzadamente de las buenas ideas y hazlas tuyas.

b. Si son ideas preciosas, se deben dominar con maestría y usarlas con tanta frecuencia como se pueda, tratando de ampliar sus límites de aplicación de maneras novedosas.

c. Trata conscientemente de romper o doblar las reglas.

d. Refresca tus puntos de vista y toma ideas desde la periferia del problema, ten en cuenta tu intuición[3].

e. No te autoimpongas restricciones innecesarias que limiten tu pensamiento.

f. Libera tu pensamiento imaginativo. Imaginar es siempre divertido y en muchas ocasiones útil.

Estrategias para comenzar:

El primer paso: la orientación.

a. Lee el problema cuidadosamente. Ponga atención en detalles como positivo vs negativo, finito vs infinito, etc.

b. Comienza clasificando en: problema de búsqueda o de demostración. ¿Es similar a otros ya vistos?

c. Identifica cuidadosamente las hipótesis y la conclusión.

d. Intenta con alguna preliminar y rápida tormenta de ideas:

- Piensa acerca de una notación conveniente.
- ¿Parece plausible algún método particular de argumentación?
- ¿Puedes adivinar alguna solución? ¡Confía en tu intuición!
- ¿Hay palabras claves o conceptos que parecen importantes? Por ejemplo: ¿desempeñan los números primos o los cuadrados perfectos o las sucesiones infinitas algún rol importante?

---

3 Con respecto a esta idea, Raimundo Reguera decía: cuando los cinco sentidos trabajan a la perfección y no hallamos la solución entonces también podemos recurrir al "olfato matemático".

» Cuando termines de hacer esto (y sin prisa) regresa atrás y hazlo todo de nuevo, pero trata de reenunciarlo todo de otra manera y así pudieras descubrir nueva información. Repite esto varias veces.

Cuando buscas la conclusión del problema, especialmente de un problema de búsqueda, algunas veces es de ayuda *fantasear* una respuesta, y releerlo con esta respuesta en mente. La respuesta fantaseada es usualmente errónea y esta relectura ayuda a ver por qué la respuesta es falsa, lo cual pudiera sacar a la luz algunos de las restricciones importantes del problema.

Después de la orientación.

En este punto, entendiste qué estás buscando y pudieras tener algunas ideas de cómo continuar.

En la mayoría de las ocasiones esto involucra una o más de las siguientes estrategias de arrancada:

a. Ensúciate las manos.

b. Mantente relajado y experimenta. Conecta grupos de números. Mantente *jugando* hasta que veas un patrón. Entonces *juega* un poco más y trata de entender por qué ocurre el patrón que has visto.

c. Penúltimo paso.

Una vez que conoces cual es la conclusión deseada, pregúntate: ¿Qué conduciría a la conclusión en un único paso? Algunas veces un penúltimo paso es obvio, una vez comenzada su búsqueda. Mientras más experimentado seas más obvio será este paso. Por supuesto, a veces, la búsqueda del penúltimo paso falla, y en su lugar nos ayuda a planificar una estrategia de demostración.

a. Piensa imaginativamente y hazlo fácil.

Estas estrategias combinan psicología y matemática y ayudan a romper el impasse inicial en el trabajo. Pregúntate, ¿Qué es lo que hace difícil el problema? ¡Entonces haz que desaparezca la dificultad! Quizás no lo puedas hacer legalmente pero, ¿a quién le importa? Evitar temporalmente las partes difíciles de un problema te permitirá hacer progresos y pudiera aclarar las dificultades.

A lo mejor, simulando que las dificultades no están ahí inducirías una solución atrevida. En el peor de los casos, te verías forzado a centrarte en las dificultades claves de tu problema, y posiblemente a formular una interrogante intermedia, cuya respuesta te ayudará con el problema que tienes entre manos. Eliminando la parte difícil del problema, aun temporalmente, conseguirás obtener alguna diversión e incrementar tu autoestima. Si tú no puedes solucionar el problema tal y como está escrito, al menos ¡harás progresos con su primo fácil!

1. *Estrategias para la argumentación.*

La argumentación es la parte de la resolución del problema en la que convences a otros (o quizás a ti mismo) de tus descubrimientos. Tu investigación inicial pudiera sugerir un método tentativo aunque en ocasiones el problema se divide en varias partes que necesitan de métodos diferentes de argumentación.

La argumentación debe ser clara y rigurosa. Debes evitar errores lógicos y grietas en los razonamientos. Lo más difícil de la argumentación es decidir si es lógicamente correcta.

1.1 *Uso de abreviaturas comunes y convenciones estilísticas.*

a. La mayoría de los buenos argumentos matemáticos comienzan con una clara declaración de la hipótesis y la conclusión. La culminación satisfactoria de la argumentación suele ser marcada con un símbolo.

b. Como en una exposición ordinaria, las argumentaciones matemáticas deben ser oraciones completas con sustantivos y verbos. Algunos verbos comunes en matemática son: $=, \neq, <, >, \leq, \geq, \in, \subset, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow$ $=, \neq, <, >, \leq, \geq, \in, \subset, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow$.

c. Las ecuaciones complicadas deben ser siempre mostradas en una línea independiente y marcadas para su posible referencia.

d. Una argumentación estrictamente formal pudiera tratar múltiples casos lógicamente similares. A veces basta con ilustrar sólo uno de ellos. Cuando esto pasa es bueno alertar a los demás con criterios del tipo “sin pérdida de la generalidad”

1.2 *Uso de la deducción y de la lógica simbólica.*

a. La deducción, también conocida como demostración directa, es la formación simple de argumentos en términos de la lógica simbólica. Un argumento deductivo toma una de las formas “si P entonces Q”, o “PQ”, o “P implica Q”

b. La equivalencia lógica. Es cuando se verifica $P \Longrightarrow QP \Longrightarrow Q$ y $Q \Longrightarrow PQ \Longrightarrow P$, en ese caso se escribe en símbolos $P \Longleftrightarrow QP \Longleftrightarrow Q$. Para probar la equivalencia debemos probar primero en una dirección, digamos $P \Longrightarrow QP \Longrightarrow Q$, y después en la otra $Q \Longrightarrow PQ \Longrightarrow P$. Esto se fundamenta en que una equivalencia y su recíproco no necesariamente se cumplen a la vez.

c. El contra recíproco. El contra recíproco de $P \Longrightarrow Q$ $P \Longrightarrow Q$ es $(no\ Q) \Longrightarrow (no\ P)(no\ Q) \Longrightarrow (no\ P)$ y estas dos implicaciones tienen siempre el mismo valor de verdad, es decir, o son ambas falsas o son ambas verdaderas.

1.3 Uso de la argumentación por contradicción[4].

En vez de demostrar de manera directa alguna cosa, comience por asumir que es falsa y eso lo debe conducir a una conclusión absurda. Una argumentación por contradicción es usualmente una estrategia poderosa cuando no es posible demostrar de manera directa.

1.4 Uso de la inducción matemática.

La inducción matemática puede ser utilizada para argumentar planteamientos de tipo:

$P(n)P(n)$ *es verdad para todos los enteros* $n \geq n_0 n \geq n_0$

Puede ser utilizada en dos maneras fundamentalmente.

a. Inducción estándar.

b. Inducción fuerte.

Esta inducción adquiere su nombre del uso en ella de una hipótesis inductiva fuerte. Después de establecer el caso base para $n_0 n_0$, se asume que para algún nn todos los demás satisfacen la condición y se utiliza esto para demostrar $P(n+1)P(n+1)$.

1.5 Otras estrategias.

Muchas estrategias pueden ser aplicadas en diferentes momentos de la resolución del problema, no solo en su comienzo.

a. Dibuje una figura.

El centro de una actitud de mente abierta en un solucionador creativo de problemas es la conciencia de que los problemas pueden y deben ser reformulados de maneras diferentes. Usualmente con solo trasladar el problema a una forma gráfica ilustrativa se hace la maravilla del descubrimiento.

b. Replantee el problema de otra manera.

Abra su mente a otras maneras de reinterpretar el problema. Por ejemplo: traslade los problemas de combinatoria a la teoría de números y viceversa, y haga lo mismo con el álgebra y la geometría, con la geometría clásica y las proyectiva, no euclidianas, números complejos etc.

c. Cambie sus puntos de observación.

Esta es otra manifestación de la "*visión periférica*", de la actitud de mente abierta y de la creatividad. En muchas ocasiones el problema es difícil porque hemos seleccionado el punto de observación malo.

Para desarrollar estos planes estratégicos se necesita de los elementos tácticos y herramentales.

Zeitz (2007, p. 4), de manera acertada, plantea que en ocasiones al ejecutar un plan estratégico de solución, a nivel táctico o herramental, aparecen obstáculos que constituyen problemas en sí mismos y que necesitan de su solución constituyendo los *puntos cruciales* o llaves en la resolución del problema. Un problema puede tener uno, varios o ningún punto crucial y el pensamiento táctico debe estar encaminado a la detección y resolución de esos puntos cruciales.

Los puntos cruciales de un problema pueden ser diferentes de un planteamiento táctico o herramental a otro, o pueden ser representaciones isomorfas del mismo punto crucial en contextos diferentes. Aunque los puntos cruciales no aparecen en el planteamiento estratégico del plan de solución, cada plan presupone una ejecución táctica y herramental particular y consecuentemente un conjunto de puntos cruciales propios.

Con su modelo logra abstraerse a los elementos esenciales de la resolución de problemas matemáticos, es decir, centrar la atención en aquellos aspectos esenciales del proceso de resolución del problema y con su sistema de premisas garantiza la concordancia de sus fundamentos psicopedagógicos. Aquí no se desprecia ninguna de las maneras conocidas de acceso al conocimiento, para este investigador tienen tanto valor unas como otras.

En este modelo están representados los elementos característicos claves y novedosos de los anteriores:

» La heurística de Polya con sus etapas replanteadas desde otro punto de observación.

» Los elementos cognitivos relevantes de Schoenfeld (conocimientos, autorregulación o control, metacognición y entrenamiento).

» La idea de plantearse la solución como un proceso investigativo de los modelos de ese tipo.

» Lo posibilidad de avances y retrocesos de Mason-Burton-Stacey, conjuntamente con la dependencia del proceso de las características psicológicas del sujeto.

A Zeitz se le puede criticar que no referencia en su modelo las implicaciones sociales en el proceso de resolución de problemas.

4 Más conocido como método del absurdo.

CONCLUSIONES

Polya, con su modelo, sentó las bases sobre las cuales han trabajado los diferentes investigadores realizando transformaciones sutiles o sustanciales y aportes que lo mejoraron o adaptaron a las necesidades y objetivos de cada uno, y que contribuyen en cuestiones específicas a la comprensión del proceso de resolución de problemas y su didáctica.

En los sustentos teóricos de los modelos sistematizados hay coincidencia en cuanto a: la resolución de problemas puede ser enseñada y aprendida; el aprendizaje de la resolución de problemas solo puede ocurrir en la actividad; la enseñanza de la resolución de problemas es un proceso complejo y como tal debe ser estudiado; la resolución de problemas es una actividad que en primer lugar actúa en el plano intrapsicológico en interrelación dialéctica con el medio socio-histórico-cultural y como toda acción mental se forma por etapas; y la necesidad de la utilización de la heurística para solucionar un problema.

El modelo de Paul Zeitz reúne en si los elementos fundamentales de los demás y representa una propuesta coherente con las concepciones actuales del proceso de resolución de problemas y con el Entrenamiento para Concursos de Matemática.

BIBLIOGRAFÍA

Arteaga Valdés, E. (2003). *El sistema de tareas para el trabajo independiente creativo de los alumnos en la enseñanza de la matemática en el nivel medio superior* Tesis doctoral Cienfuegos: Universidad Carlos Rafael Rodríguez.

Ausubel, O. P. (1991). *Psicología educativa*. México: Trillas.

Ballester Pedroso, S., et al. (1992). Metodología de la enseñanza de la matemática tomo I. Ciudad de La Habana: Editorial, Pueblo y Educación.Bugaev, A. I. (1987). *Metodología de la enseñanza de la Física en la escuela media*. La Habana: Pueblo y Educación.

Campistrous, L., & Rizo, C. (1996). *Aprende a resolver problemas aritméticos*. La Habana: Pueblo y Educación.

Cuena, J. (1986). *Inteligencia artificial: sistemas expertos*. Madrid: Alianza.

Davidson, L. J. (1987). Los concursos y olimpiadas de conocimientos: un estímulo al desarrollo de las capacidades de los alumnos. *Educación*, (65), pp. 48-55.

Delgado Rubí, J. R. (1999). *La enseñanza de la resolución de problemas matemáticos. Dos elementos fundamentales para lograr su eficacia: la estructuración sistémica del contenido de estudio y el desarrollo de las habilidades generales matemáticas* Tesis doctoral. La Habana.

Fundación Wikimedia. (2013). Wikipedia. La enciclopedia libre. Recuperado de http://www.wikipedia.org

Gil Pérez, D., & De Guzmán Ozámiz, M. (2004). *Enseñanzas de las Ciencias y las Matemáticas. Tendencias e Innovaciones*. Organización de Estados Iberoamericanos. Editorial Popular. Recuperado de http://www.oei.es/oeivirt/ciencias.pdf

Gil Pérez, D., & Martínez-Torregrosa, J. (1983). A model for problem-solving in accordance with scientific methodology. *European Journal of Science Education*, (5), pp. 447-457.

Glaser, R. (1984). Education and thinking. The role of knowledge. *American Psychologist*, *2*, pp. 93-104.

Gómez Zoque, A. (2004). *Introducción a la didáctica de las ciencias*. Holguín: Instituto Superior Pedagógico José de la Luz y Caballero.

Klingler, C., & Vadillo, G. (1997). *Psicología cognitiva. Estrategias en la práctica docente*. México: Litográfica Ingramex.

Larson Loren, C. (1983). *Problem-Solving through problems*. New York: Springer-Verlag New York Inc.

Mason, J., Burton, L., & Stacey, K. (1982). *Thinking mathematically*. New York: Addison Wesley.

Mazarío Triana, I. (2002). *La resolución de problemas en la Matemática I y II de la carrera de Agronomía* Tesis doctoral. Matanzas: Universidad de Matanzas

Mazarío Triana, I. (2009). La resolución de problemas: un reto para la educación Matemática contemporánea. En I. Mazarío Triana, T., Sanz Cabrera, R., Hernández Camacho, M., YII Lavin, M., &Horta Navarro, A. C. Mazarío Triana, *Reflexiones sobre un tema polémico: la resolución de problemas* (pp. 4-19). La Habana: Universitaria.

Nieto Said, J. H. (2004). Resolución de problemas matemáticos. Recuperado de http://ommcolima.ucol.mx/guias/TallerdeResolucionproblemas.pdf

Rodríguez Rodríguez, L. E., Ramos Bañobre, J., & Ilizastigui Matos, A. (2012). Metodología para la solución de problemas en el proceso de enseñanza-aprendizaje de las ciencias en la escuela. En N. P. Pérez Ponce de León, (p. 173-192). La Habana: Pueblo y Educación.

Santos Trigo, L. M. (1994). La resolución de problemas en el aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de investigación Nº 28*. México: CINVESTAV.

Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problems Solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense-Making in Mathematics. En D. Grouws *Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning* (p. 334-370). New York: MacMillan.

Tao, T. (2005). *Solving mathematical problems. A personal perspective* (Segunda parte). Los Ángeles: University Press.

Zeitz, P. (2007). *The Art and Craft of Problem Solving*. (A. Battle, Ed.) (Segunda parte). New Jersey: John Wiley & Sons, Inc.