Fecha de presentación: junio, 2025 **Fecha de Aceptación**: agosto, 2025 **Fecha de publicación**: septiembre, 2025

CARACTERIZACIÓN DE LOS CONTENIDOS SOBRE RECTAS TANGENTES EN SEIS LIBROS DE GEOMETRÍA ANALÍTICA

CHARACTERIZING THE CONTENT ON TANGENT LINES OF SIX ANALYTICAL GEOMETRY TEXTBOOKS

Margarita Tetlalmatzi Montiel[1*]
E-mail: tmontiel@uaeh.edu.mx
ORCID: https://orcid.org/0000-0003-3659-1538
Aarón Víctor Reyes Rodríguez[1]
E-mail: aaronr@uaeh.edu.mx
ORCID: https://orcid.org/0000-0001-8294-9022
[1]Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo. México.
*Autor para correspondencia

Cita sugerida (APA, séptima edición)

Tetlalmatzi Montiel, M. y Reyes Rodríguez, A.V. (2025). Caracterización de los contenidos sobre rectas tangentes en seis libros de geometría analítica. *Revista Conrado, 21*(106), e4402.

RESUMEN

Se realizó un análisis de contenido de seis libros de geometría analítica, con la finalidad de identificar oportunidades de aprendizaje que ofrece el material sobre rectas tangentes. Los conceptos teóricos involucran un análisis cualitativo de contenido desde una perspectiva matemática, considerando como categorías a priori a cuatro diferentes planos epistemológicos sobre rectas tangentes: (a) geométrico, (b) algebraico, (c) analítico y (d) mecánico o cinemático. La construcción de categorías se realizó de forma deductiva-inductiva, considerando como unidad de análisis a los bloques de contenido narrativo. Se identificó que la aproximación más frecuente para abordar el tema de tangentes es la analítica, seguida de la aproximación algebraica y la geométrica. La aproximación mecánica solo aparece en uno de los libros. Se identificaron dos categorías emergentes, relacionadas con el tipo de problemas resueltos y de representaciones gráficas utilizadas en los textos. En lo que respecta a las oportunidades de aprendizaje se enfatiza la noción de tangente como límite de secantes, dejando de lado otras aproximaciones importantes que podrían ser de utilidad para el desarrollo del pensamiento matemático. Lo anterior se debe a que la geometría analítica, en los textos revisados, se concibe como una materia preparatoria para los cursos de cálculo.

Palabras clave:

Análisis de contenido, libros de texto, rectas tangentes, geometría analítica, oportunidades de aprendizaje.

ABSTRACT

We developed a qualitative content analysis of six Analytical Geometry textbooks with the aim of identifying learning opportunities offered by the content on tangent lines. The theoretical concepts used to organize the study involve a qualitative content analysis from a mathematical perspective, considering four different epistemological planes on tangent lines as a priori categories: (a) geometric, (b) algebraic, (c) analytical and (d) mechanical or kinematic. The categories construction was carried out in a deductive-inductive way, considering as analysis units the narrative content blocks. The analytical approach was identified as the most frequent when addressing the topic of tangents, followed by the algebraic and the geometrical approximation. In only one book was found the mechanical approximation. Two emerging categories were identified, related to the type of problems solved and graphic representations used in the texts. About the learning opportunities, the emphasis is on the notion of the tangent as a limit of secants. This leaves other important approximations aside that could be useful for mathematical thinking development. This is due to the fact that analytical geometry, in the revised texts, is conceived as a preparatory subject for calculus courses.

Keywords:

Content analysis, textbooks, tangent lines, analytic geometry, learning opportunities

INTRODUCCIÓN

La determinación de tangentes de curvas planas es un problema que ha sido relevante para el desarrollo de la matemática desde la Grecia clásica. También es un tópico de interés desde el punto de vista de la educación matemática ya que, mediante el estudio de este tema, es posible que los estudiantes conecten diversos conceptos como aproximación lineal, tasa instantánea de cambio, límite, derivada, construcción geométrica, curva plana, curva mecánica, raíces de ecuaciones, etcétera (Rivera-Figueroa & Cruz-Canales, 2024). Además, las rectas tangentes son herramientas para resolver problemas de óptica o problemas sobre optimización de distancias. La búsqueda de un método general para determinar las ecuaciones de rectas tangentes a curvas planas se considera como el problema constitutivo o fundacional del cálculo diferencial.

En el tercer libro de los elementos de Euclides (~ 300 a.C.) se exponen resultados sobre tangentes; por ejemplo, en la proposición 16 se establece que una tangente a una circunferencia es perpendicular al diámetro que pasa por el punto de tangencia; mientras que en la proposición 17 se ejemplifica el procedimiento para construir una recta tangente a la circunferencia, desde un punto dado fuera de esta. A su vez, Arquímedes (~ 250 a.C.) fue capaz de obtener tangentes de la espiral que lleva su nombre, en el libro ***Sobre las Espirales*** (proposiciones de la 13 a la 20), mediante consideraciones cinemáticas que le permitieron determinar la dirección instantánea del movimiento del punto que genera la curva (Ceano, 2020). Por otra parte, Apolonio (~ 200 a.C.) estudió de forma exhaustiva, en el capítulo II y V del libro Las Cónicas, la construcción mediante regla y compás, de tangentes y normales para elipses, parábolas e hipérbolas (Keppens & Keppens, 2021). Hasta este momento histórico, se habían desarrollado procedimientos para trazar tangentes para un número reducido de curvas planas, y no fue sino hasta la edad moderna que se generaron métodos generales basadas en las técnicas del cálculo diferencial, para resolver el problema de las tangentes.

Durante el siglo XVII Descartes desarrolló métodos para obtener ecuaciones de rectas normales (y tangentes) a curvas algebraicas, con base en consideraciones sobre la existencia de raíces reales dobles en ciertas ecuaciones (Farouki, 2022). Específicamente, Descartes redujo el problema de obtener una recta tangente a una curva, al problema de encontrar una circunferencia tangente a dicha curva. Esto es, Descartes identifica implícitamente la equivalencia entre una propiedad geométrica: *una circunferencia es tangente a una curva en el punto A*, con la propiedad algebraica: *el punto A es un punto doble de intersección entre la circunferencia y la curva* (Rashed, 2018). Sin embargo, este método conduce a ecuaciones que, generalmente, son difíciles de resolver.

Para el año 1638, Roberval había encontrado cómo trazar la tangente en cualquier punto de una cicloide, utilizando ideas análogas a las empleadas por Arquímedes con la espiral que lleva su nombre. Por otro lado, en 1664 Torricelli publicó el artículo titulado ***De dimensione parabolae***, en el que expone resultados similares a los de Roberval respecto del trazo de tangentes a la cicloide (Dhombres, 2024). Alrededor de 1650, Fermat y Barrow desarrollaron métodos infinitesimales de mayor generalidad para la obtención de tangentes para familias más amplias de curvas. Dichos métodos contribuyeron al desarrollo posterior del cálculo de Newton y Leibniz (Bell, 2019). Otros matemáticos de la época, interesados en el problema de las tangentes a curvas planas fueron Lahire, Hudde y Sluse. Este último obtuvo en 1652, un procedimiento para encontrar tangentes a una curva con ecuación $f(x, y) = 0$, donde f es un polinomio (Valdez, 2024).

Es importante mencionar que el método de Descartes, para obtener ecuaciones de rectas tangentes, es completamente algebraico y fácil de entender. En contraste, el método de Fermat que incluye ideas del análisis matemático es un método que proporciona los resultados esperados, pero que no permite entender por qué funciona y tampoco se puede traducir en una definición conveniente de la tangente a una curva (Rachelli & Martins, 2021).

Este artículo surge por nuestro interés en saber por qué en libros de texto de geometría analítica se otorga poca importancia a la obtención de tangentes a curvas planas, a pensar de la relevancia de este tópico en el desarrollo histórico de la matemática. Posteriormente, nos interesó conocer cómo se aborda el tema en algunos libros de texto, con el ánimo de identificar posibles ideas o estrategias útiles para apoyar el aprendizaje de los estudiantes que cursan la asignatura, considerando las diversas dificultades de aprendizaje reportadas en la literatura de investigación; por ejemplo, que la mayoría de los estudiantes solo tienen una concepción parcial de la noción de tangente.

El trabajo resulta relevante ya que los libros de texto de matemáticas no son todos iguales, existen diferencias sustanciales en cuanto a los fundamentos pedagógicos y didácticos que se consideran al momento de estructurar y presentar los contenidos, en función del país, nivel educativo y temática que se aborda (Jäder et al., 2020). Los resultados del trabajo pueden ser de utilidad para esclarecer cuáles son las diferentes formas de presentar el tema de tangentes a curvas planas en algunos libros de geometría analítica publicados en los siglos XIX y XX, los cuales han sido empleados como textos en universidades de los Estados Unidos o México.

Durante la segunda mitad del siglo XIX, los estudiantes de College, con orientación en tecnología, en los Estados Unidos, cursaban geometría analítica y cálculo diferencial en el tercer o cuarto año de sus estudios. En México, la geometría analítica y el cálculo infinitesimal se introdujeron en el currículum del nivel superior, específicamente en la Escuela de Minas, a finales del siglo XVIII y en el bachillerato en los estudios preparatorios.

Elementos teóricos

El análisis de libros de texto es una línea de investigación relevante en el campo de la educación matemática, debido a que estos materiales son la herramienta principal de la que disponen los docentes para orientar y apoyar el proceso de aprendizaje de sus estudiantes (Pepin & Gueded, 2020). Así, los libros de texto influyen sustancialmente en las prácticas educativas, porque los docentes los usan para decidir qué tareas implementar y cómo implementarlas (Rezat et al., 2021). Al respecto, se ha obtenido evidencia que los libros de texto determinan el grueso de las actividades que se implementan en las aulas de los Estados Unidos (Blazar et al., 2020). Es decir, el contenido y estructura de los textos moldea lo que se enseña, cómo se enseña y lo que aprenden los estudiantes (Fan et al., 2021).

La investigación sobre libros de texto de matemáticas tiene diversas vertientes. Por un lado, existen trabajos interesados en conocer en qué medida se cubren los temas indicados en el currículum; mientras que otras investigaciones se centran en el tipo y características de las tareas, alta o baja demanda cognitiva (Basyal et al., 2023; Polat & Dede, 2023), para determinar las oportunidades de aprendizaje y los atributos del conocimiento construido a través de dichas tareas. Las anteriores líneas de investigación se asocian con dos preguntas: (a) ¿cómo representan los libros de texto los contenidos especificados en el currículum escolar? y (b) ¿cómo apoyan los libros de texto el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas? (Fan et al., 2021). Otra forma de agrupar las investigaciones involucra la distinción entre análisis de materiales individuales o estudios comparativos de dos tipos: (a) análisis de libros de un mismo país o (b) análisis de textos utilizados en diferentes países.

A continuación, se describen algunos elementos teóricos que permiten entender el tipo de análisis que se lleva a cabo en este artículo, así como los elementos fundamentales que caracterizan la presentación del concepto de recta tangente.

Análisis de libros de texto de matemáticas

De acuerdo con Stylianides (2014) un libro de texto se puede analizar desde las siguientes perspectivas básicas: (a) perspectiva del estudiante, (b) perspectiva matemática, (c) perspectiva del docente y (d) perspectiva del autor del libro. Dados los objetivos de este trabajo, decidimos analizar libros de texto de geometría analítica desde una perspectiva matemática.

Cuando un texto se analiza desde una perspectiva matemática, generalmente se pretende responder a la pregunta: ¿cuáles oportunidades para el desarrollo de una actividad matemática ofrece el contenido narrativo, o las tareas, de un texto? Es decir, se busca determinar el potencial matemático del contenido de un libro de texto, sin considerar algún escenario didáctico específico. Las oportunidades para desarrollar una actividad matemática incluyen actividades tales como explorar relaciones, formular conjeturas o problemas, representar ideas, transformar representaciones, proponer ejemplo o contraejemplos, ejecutar procedimientos rutinarios y algoritmos, justificar resultados, comunicar y contrastar ideas, entre otros.

El análisis desde una perspectiva matemática involucra la determinación de elementos e interacciones incluidas en el denominado *plano epistemológico*, propuesto por el modelo denominado *espacio de trabajo matemático* (Kuzniak, 2022): (a) un conjunto de objetos concretos y tangibles que incluyen imágenes geométricas, símbolos algebraicos, gráficas o modelos; (b) un conjunto de artefactos tales como ábacos, instrumentos de dibujo físicos o virtuales, así como técnicas de cálculo o construcción; y (c) un sistema teórico de referencia basado en definiciones, propiedades. Los componentes anteriores se estructuran de acuerdo con ciertos objetivos predeterminados.

Planos epistemológicos del concepto de tangente

De acuerdo con Ceano (2020), existen tres puntos de vista para abordar el concepto de recta tangente a una curva plana: (a) geométrico, (b) algebraico, y (c) analítico (basado en la aplicación del concepto de límite); cada una de las cuales determina un plano epistemológico para el concepto.

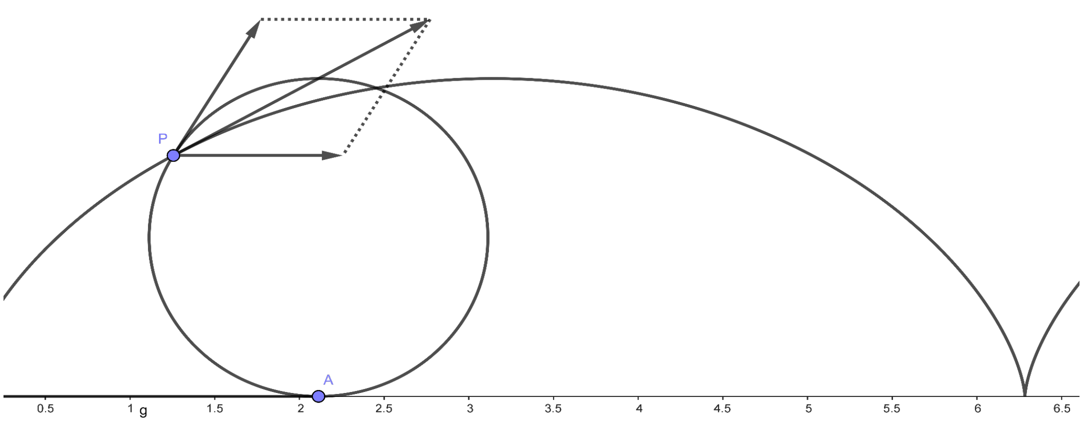
El punto de vista gráfico se orienta al trazo de rectas tangentes mediante herramientas tales como regla y compás, y se fundamenta en la percepción visual. Esta aproximación está asociada con el periodo histórico de la matemática griega (Euclides, Apolonio). El trazo geométrico de una tangente es estático y tiene algunas características que difieren de la obtención de una recta tangente en el marco algebraico o analítico. La recta tangente trazada es una aproximación, en la mayoría de los casos, excepto para curvas tales como circunferencias o cónicas. Para realizar la construcción geométrica solo se requiere una percepción de lo que es una tangente, sin limitaciones asociadas con la habilidad técnica para operar expresiones algebraicas, o para calcular límites o derivadas. Mediante este punto de vista se promueve una percepción global de la tangente, como una recta que toca en un solo punto a una curva.

La perspectiva algebraica se basa en el marco geométrico y se orienta a obtener una ecuación para la recta tangente. Esta aproximación se asocia con los procedimientos propuestos por Descartes. Mediante este punto de vista se promueve una percepción local de la tangente, en la cual no se considera relevante lo que ocurre más allá del punto de tangencia (Rashed, 2018).

Desde un punto de vista analítico la tangente es considerada como un subproducto de la derivada de una función, ya que se concibe a una tangente como la recta que pasa por un punto de una curva, cuya pendiente es igual a la derivada de la función en dicho punto (Ceano, 2020). Esta perspectiva incluye considerar a una tangente como límite de rectas secantes.

Adicionalmente, identificamos una cuarta aproximación denominada mecánica o cinética, la cual engloba objetos, definiciones y procedimientos utilizados por Arquímedes o matemáticos como Roberval y Torricelli. Desde este punto de vista, una curva se define como la trayectoria de un punto móvil, que obedece a dos tipos de movimientos simultáneos, y la tangente en un punto de la curva se conceptualiza como la dirección del movimiento en ese punto. Si se conoce la razón entre las velocidades de los dos movimientos, entonces la dirección del movimiento resultante se puede hallar mediante la ley del paralelogramo. Es importante subrayar que estas técnicas se pueden aplicar únicamente a curvas mecánicas como la espiral de Arquímedes o la cicloide. Por ejemplo, la cicloide se define como el lugar geométrico que describe un punto de una circunferencia que rueda sobre una recta horizontal sin deslizamiento. A continuación, se cita un procedimiento para obtener la tangente en un punto *P* de la cicloide (Figura 1). El punto que genera la cicloide tiene una velocidad angular igual a la velocidad de avance horizontal, por tanto, su tangente en un punto se obtiene sumando el vector tangente a la circunferencia generadora en *P* y un vector horizontal en *P*, y ambos vectores tienen igual módulo (Johnston, 2019).

Fig. 1: Tangente a la cicloide.



Fuente: Elaboración propia en base a Johnston (2019)

MATERIALES Y MÉTODOS

Esta investigación es comparativa y documental. El análisis documental involucra una revisión repetida, examinación e interpretación de los datos con la finalidad de comprender su significado y obtener conocimiento empírico respecto del constructo que se estudia. Específicamente, se realizó un ***análisis cualitativo de contenido***, de seis libros de texto de geometría analítica, los cuales se enlistan en la Tabla 1 (el nivel L corresponde a licenciatura y el B a bachillerato).

Tabla 1: Lista de libros analizados.

Título	Editorial	Autor(es)	Año	Nivel
An elementary treatise on analytic geometry (AETAG)	Forgotten Books	Bowser	2018	L
Plane and solid analytic geometry (PSAG)	University of Michigan	Osgood y Graustein	2005	L
An elementary course in analytic geometry (AECAG)	Nabu Press	Tanner y Allen	2011	L
A brief course in analytic geometry (ABCAG)	BiblioBazaar	Allen y Tanner	2008	L
Geometría analítica (GA)	Limusa	Lehmann	2018	B
Geometría analítica y trigonometría (GAT)	Pearson Educación	Oteyza, Lam, Carrillo, Hernández y Ramírez	2015	B

Fuente: Elaboración propia

El análisis de contenido cualitativo es un método para describir sistemáticamente el significado inmerso en información en modo de texto, imagen, vídeo, audio, etcétera (Kuckartz & Rädiker, 2023). El resultado del análisis consiste en conceptos o categorías, cuyo propósito es estructurar un modelo, sistema o mapa conceptuales que describe el fenómeno de referencia y captura relaciones entre los elementos que lo constituyen (Kuckartz & Rädiker, 2023). El análisis de contenido cualitativo busca identificar significados, intenciones, consecuencias y contextos. El desarrollo de categorías puede llevarse a cabo de tres formas: (a) inductiva, (b) deductiva y (c) deductiva-inductiva. Si no hay suficiente información acerca del fenómeno de referencia, o el conocimiento es fragmentado, se recomienda la aproximación inductiva. Esta aproximación transita de lo específico a lo general, de modo que se observan casos particulares y entonces se agrupan en categorías de carácter más general. Por otra parte, una aproximación deductiva se basa en elementos teóricos o modelos previos y se orienta de lo general a lo particular.

Durante la realización de un análisis de contenido hay una relación dialéctica entre la compresión de las partes y el todo de un texto; y dicho análisis involucra un proceso interpretativo, sustentado en los conocimientos previos de cada analista**.** En este artículo implementamos las cinco recomendaciones propuestas por Kuckartz y Rädiker (2023) para llevar a cabo el proceso de codificación del texto y la identificación de nuevas categorías en la fase inductiva del proceso:

1. Reflexionar sobre las propias ideas preconcebidas y cualquier supuesto con respecto a la pregunta de investigación.
2. Analizar el texto en su conjunto, identificando las ideas que no son claras hasta obtener una mejor comprensión global del texto que ayude a precisar las ideas particulares.
3. Ser consciente de aspectos idiomáticos o culturales integrados en el texto y con los cuales no estamos familiarizados.
4. Prestar atención, desde la primera lectura, a los temas que aparecen en el texto y que son importantes para la investigación.
5. Diferenciar entre una lógica de aplicación (identificación en el texto de temas y categorías especificadas a priori) y una lógica de descubrimiento (identificación en el texto de cosas nuevas importantes, quizás inesperadas).

La unidad de análisis empleada es el bloque de ***contenido narrativo***, asociado con el tema de rectas tangentes. El contenido narrativo consiste en párrafos de texto, tablas, figuras, diagramas o imágenes mediante las cuales el autor de un libro introduce, explica o expone el tema, incluyendo ejemplos resueltos, fórmulas, desarrollos algebraicos, definiciones, teoremas o ideas clave (Liu et al., 2022). A partir del contenido narrativo identificamos el enfoque utilizado por el autor para la obtención de las tangentes (geométrico, algebraico, analítico o cinemático); así como los elementos del plano epistemológico determinados por dicho enfoque, incluyendo si el autor proporciona alguna definición de tangente, y sus características. También se registra el uso de demostraciones u otro tipo de formas de justificación.

Proceso de análisis

La primera acción del análisis consistió en revisar la estructura global de la información textual, la cual incluyó identificar si el libro se encuentra dividido en capítulos, secciones, lecciones o apartados. Posteriormente, se seleccionó el material correspondiente al tema de tangentes a una curva plana y se sintetizó. Esta síntesis se expone en el siguiente apartado. Para llevar a cabo el proceso de codificación empleamos una aproximación deductiva-inductiva, considerando como categorías iniciales a priori, el tipo de aproximación presente en el texto, cada una de las cuales determina un plano epistemológico, dentro del cual se identificaron sus componentes y relaciones. La codificación se realizó de forma independiente por cada uno de los investigadores y, posteriormente, se organizaron sesiones de trabajo en equipo, para identificar semejanzas en la codificación y tomar decisiones con respecto a cómo abordar las divergencias. Las acciones previas refieren a un proceso de triangulación de investigadores. Los hallazgos derivados del proceso de codificación se colocaron en tablas, las cuales fueron la base para la redacción de resultados.

RESULTADOS-DISCUSIÓN

En esta sección se describe la estructura global de cada libro y se comentan los fundamentos pedagógicos o didácticos mencionados por los autores. Posteriormente, se sintetiza el contenido narrativo de cada uno de los textos, correspondiente al tema de tangentes. Cada subsección se finaliza con un párrafo de comentarios, en el cual se describe el plano epistemológico de la tangente, así como cualquier otra información acerca del texto considerada como relevante. Es importante mencionar que en el apartado dedicado a Tanner y Allen se analizan conjuntamente los dos libros de estos autores.

AETAG: Bowser (2018)

Edward Bowser (1837-1910) fue profesor en la universidad Rutgers de 1868 a 1904. Sus libros College algebra, Analytic geometry y Differencial and integral calculus fueron usados como textos en los cursos respectivos en esta universidad. El libro AETAG presenta en su prefacio una lista de textos en los que se basa, entre los que se encuentra el libro Analytic Geometry of Three Dimensions del matemático irlandés George Salmon. El texto de Bowser (2018) está diseñado para estudiantes de College y de Ciencias, por lo que incluye demostraciones. Este libro está conformado por 198 artículos (apartados), 163 de los cuales corresponden a la primera parte correspondiente al estudio de la geometría plana; mientras que el resto de los apartados integran la segunda parte que trata sobre la geometría del espacio. Los apartados de la primera parte del libro se encuentran agrupados en 9 capítulos.

La primera vez que se trata el tema de tangentes es en el capítulo IV, que estudia la circunferencia. Posteriormente, en el capítulo correspondiente a cada una de las cónicas, hay uno o más artículos dedicados a las ecuaciones de tangentes. Es importante destacar que en la sección sobre geometría del espacio se obtiene la ecuación del plano tangente a un elipsoide. En el apartado 42, Bowser (2018) propone la siguiente definición: La *tangente* a una curva es la línea que une dos puntos indefinidamente cercanos en la curva. Luego, emplea esta definición para determinar la ecuación de la recta tangente de un círculo centrado en el origen. El procedimiento es similar al empleado en el apartado 44, al determinar la ecuación de la recta tangente del círculo $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ en el punto (x', y'). Considera otro punto del círculo (x'', y''), así que se cumple $(x'-a)^2+(y'-b)^2=r^2$ y $(x''-a)^2+(y''-b)^2=r^2$, al restar estas ecuaciones llega a $(x'-x'')(x'+x''-2a)+(y'-y'')(y'+y''-2b)=0$, de donde obtiene la Fórmula 1

$$\frac{y'-y''}{x'-x''}=-\frac{x'+x''-2a}{y'+y''-2b} \qquad \text{F 1}$$

Por lo que la ecuación de la recta que pasa por (x', y') y (x'', y'') es la Fórmula 2

$$y-y'=-\frac{x'+x''-2a}{y'+y''-2b}(x-x') \qquad \text{F 2}$$

Termina diciendo que cuando los dos puntos (x', y') y (x'', y'') coinciden, se llega finalmente a la ecuación de la tangente, Fórmula 3

$$y-y'=-\frac{x'-a}{y'-b}(x-x') \qquad \text{F 3}$$

Después de reacomodar los términos, llega a la expresión $(x-a)(x'-a)+(y-b)(y'-b)=r^2$ de la recta tangente del círculo con centro en (a, b) y radio r, en el punto (x', y'). La ecuación de la recta normal al círculo la encuentra en el apartado 43 considerando que es perpendicular a la recta tangente en el mismo punto, y menciona al final que la recta normal pasa por el centro del círculo.

En el apartado 54 determina la ecuación de la tangente de la parábola de la forma $y = 2px$ en un punto, y en el apartado 74 de una elipse de la forma $x^2/b^2 + y^2/b^2 = 1$. En ambos casos parte de la ecuación de la secante que pasa por dos puntos de la cónica e iguala los puntos para encontrar la recta tangente. La ecuación de la hipérbola que analiza es $x^2/b^2 - y^2/b^2 = 1$, y en el apartado 107 menciona que para encontrar la ecuación de la recta tangente solo se intercambia b^2 por $-b^2$ en la ecuación del apartado 74.

Al final de los apartados 55 y 56 dan dos formas en que se puede dibujar la recta tangente de la parábola en un punto usando escuadras y compás. Precisamente en el apartado 56 presenta la demostración de que la tangente de la parábola en cualquier punto forma ángulos iguales con los ejes de la curva y la línea focal a el punto de contacto. Algo similar ocurre al final de los apartados 74 y 76 para la elipse y al final del apartado 107 para la hipérbola. El capítulo ocho lo dedica a la forma general de las cónicas, sin embargo, solo se concentra en las traslaciones y rotaciones y no encuentra ninguna forma general de las tangentes a las cónicas. Al final de cada apartado mencionado da una lista corta de ejercicios con respuestas, no presenta ejemplos resueltos, aunque a sus listas de ejercicios les llama ejemplos. Sin embargo, en otros apartados del libro sí incluye ejemplos.

Comentarios. La aproximación utilizada por el autor es analítica, ya que se emplea implícitamente el concepto de límite para la obtención de las ecuaciones de las rectas tangentes, pero la combina con una aproximación geométrica que incluye trazos con regla y compás. Entre los objetos que incluye el plano epistemológico de la tangente se incluye a las cónicas consideradas como curvas planas y sus ecuaciones, rectas secantes, recta tangente, ecuaciones punto-pendiente. En cuanto a los artefactos, se consideran técnicas para el cálculo de límites que no incluyen expresiones indeterminadas para ser efectuados en papel y lápiz, regla y compás. Entre las relaciones presentes se encuentra una concepción global de la tangente como el elemento límite de una familia de secantes a la curva. Como parte del sistema teórico se incluye la percepción visual de las curvas, asociadas con un sistema de álgebra simbólica.

PSAG: Osgood y Graustein (2005)

William Fogg Osgood (1864-1943) y William C. Graustein (1897-1942) fueron profesores investigadores de la universidad de Harvard. Osgood escribió varios libros para estudiantes de maestría y doctorado, y también para estudiantes de College, entre los que destacan A first Course in Differential and Integral Calculus (1907) y Elementary Calculus (1921). Entre los libros que escribió Graustein están Introduction to Higher Geometry (1930) y Differential Geometry (1935).

Osgood y Graustein publicaron el libro PSAG, como un curso elemental de geometría para estudiantes universitarios, con la intención de ser presentado en una forma simple y concreta, y en lo posible, mostrando relaciones con Física. El libro está integrado por 190 artículos (apartados), agrupados en 24 capítulos. Los autores comentan que el estudio de la geometría analítica por primera vez implica una gran demanda cognitiva para el estudiante, por lo que recomiendan evitar cálculos algebraicos demasiado largos que aumenten las dificultades al estudiante. En cada tema presentan un caso particular, seguido de ejemplos desarrollados. Además, al final de cada capítulo se incluyen los ejercicios y las aplicaciones más avanzadas.

La primera vez que aparece el tema de rectas tangentes es en el apartado 3 del capítulo IV, que trata sobre la circunferencia. Los capítulos VI La parábola, VII La elipse y VIII La hipérbola, tienen apartados para las tangentes, pero en ellos se indica dirigirse al capítulo IX para ver la ecuación de las tangentes a dichas curvas en un punto arbitrario. Con esto, el contenido de estos capítulos se centra en enunciar y demostrar propiedades y aplicaciones de las rectas tangentes, en especial aplicaciones en la física. Es importante mencionar que se incluye un apartado en el cual se obtienen las ecuaciones de rectas tangentes con pendiente dada, con base en determinar raíces dobles de una ecuación cuadrática. Por otra parte, en el capítulo XXII, se obtienen ecuaciones para el plano tangente a una esfera y ecuaciones de rectas y planos tangentes a superficies cuadráticas.

Osgood y Graustein (2005) encuentran la pendiente de la recta tangente del círculo con centro en el origen como la recta perpendicular al radio que pasa por el punto, dejando el caso de círculos con centro en cualquier otro punto como ejercicio, al final del apartado proporcionan un ejemplo y los ejercicios. Comentan los autores que este método es muy particular para el círculo y que para el caso más general se necesita la herramienta de límite. Los autores encuentran la pendiente de la recta tangente del círculo con centro en el origen como la recta perpendicular al radio que pasa por el punto $P_1(x_1, y_1)$, dejando el caso de círculos con centro en cualquier otro punto como ejercicio, al final del apartado proporcionan un ejemplo y los ejercicios. Comentan los autores que este método es muy particular para el círculo y que para el caso más general se necesita la herramienta de límite. En el capítulo IX se presenta el método general para calcular las pendientes de las rectas tangentes por medio de límites. La pendiente de la secante que une los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P'(x_1 + h, y_1 + k)$, es $tan(\tau') = k/h$. Por lo que, la pendiente de la recta tangente es el límite de las pendientes de las secantes, esto es la Fórmula 4

$$tan(\tau) = lim_{h \doteq 0} \frac{k}{h} \qquad \text{F 4}$$

Donde ≐ se lee como 'se aproxima al límite'. Primero ofrece un ejemplo donde se aproximan dando valores numéricos a h. Posteriormente calcula la pendiente de la recta tangente a algunas curvas, como $y = x^2$, y así otros ejemplos. Posteriormente se dedica concretamente a la parábola, la elipse y la hipérbola, aunque esta última la deja al estudiante. Por ejemplo, calcula la pendiente de la recta tangente de la elipse $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ de la siguiente manera. Resta $b^2x_1^2 + a^2y_1^2 = a^2b^2$ a la expresión $b^2(x_1 + h)^2 + a^2(y_1 + k)^2$, dando $2b^2x_1h + 2a^2y_1k + b^2h^2 + a^2k^2 = 0$, divide por h, sustituye $tan(\tau') = k/h$ y despeja a $tan(\tau')$, quedando Fórmula 5

$$tan(\tau') = -\frac{2b^2x_1 + b^2h}{2a^2y_1 + a^2k}$$
F 5

Encontrando que es equivalente a la Fórmula 6

$$lim_{P \doteq P'} tan(\tau') = lim_{h \doteq 0} -\frac{2b^2x_1+b^2h}{2a^2y_1+a^2k} = -\frac{b^2x_1}{a^2y_1}$$

F 6

Note que, aunque en el segundo límite de la ecuación (F 6) sólo indica que h se aproxima a cero, también k se aproxima a cero. Posteriormente, determina las pendientes de las rectas tangentes en un punto de la parábola, la elipse y la hipérbola centradas en el origen, empleando límites. Concluye el apartado proporcionando las ecuaciones de las rectas tangentes en un punto arbitrario de las cónicas, empleando las pendientes ya calculadas.

Comentarios. La aproximación utilizada para presentar el tema de tangentes es analítica, ya que se basa en la idea de límite. Así, la tangente se conceptualiza como un elemento límite de una familia de rectas secantes. Una característica distintiva de este texto consiste en las relaciones que establece entre la geometría analítica y la física. Por ejemplo, los autores proporcionan una demostración mecánica del teorema que afirma: ***La tangente a la elipse en cualquier punto forma ángulos iguales con los radios focales trazados desde ese punto***. Otro aspecto respecto de la aproximación didáctica seguida por los autores es utilizar casos concretos, que incluyen valores numéricos para las pendientes de las rectas secantes, como un medio para convencer al estudiante de que la ecuación de la recta tangente es la que finalmente se obtuvo. En cuanto al uso de representaciones geométricas, en el caso de la tangente a la circunferencia sólo representa gráficamente un caso prototípico centrado en el origen del sistema de coordenadas. En el caso de las otras cónicas, solo se presenta la ecuación general de la recta tangente y se refiere al lector a la discusión más general expuesta en el capítulo IX. Es importante señalar que, en la demostración de la propiedad de las tangentes de la elipse, utiliza representaciones geométricas que no hacen uso de un sistema de coordenadas. Para demostrar la propiedad análoga de las tangentes en la hipérbola nuevamente utiliza la representación de un caso prototípico centrado en el origen. Este libro se caracteriza por discutir propiedades de las tangentes de la elipse y la hipérbola y no solo se enfoca en mostrar la forma general de las ecuaciones de tales tangentes. En la discusión del método para obtener las tangentes a las cónicas, se inicia la discusión haciendo referencia a una curva general, la cual representa geométricamente sin un sistema coordenado, y busca mostrar a la tangente como el caso límite de una familia de secantes. En este apartado los autores transitan de los ejemplos resueltos en casos concretos hacia mayores niveles de generalidad.

AECAG: Tanner y Allen (2011)

John Henry Tanner (1861-1940) fue profesor en la universidad de Cornell durante 35 años, publicó varios libros de álgebra y geometría. Entre sus libros de geometría analítica se encuentran ***An elementary course in analytic geometry*** y ***A brief course in analytic geometry***, escritos junto con Joseph Allen. El libro AECAG fue diseñado para estudiantes de ingeniería, arquitectura y como un curso previo para estudiantes que van a tomar cursos avanzados de matemáticas. Los autores mencionan que, en su experiencia, es recomendable iniciar el curso con una revisión de álgebra y trigonometría, siendo esta la razón del primer capítulo del libro. El libro está integrado por dos partes, la primera de ellas enfocada en la geometría analítica plana y la segunda a la geometría analítica sólida. El libro cuenta con 233 artículos (apartados), 198 de los cuales pertenecen a la primera sección y se agrupan en ocho capítulos. Al inicio del libro, los autores proponen una forma de organizar el contenido del texto para un curso corto consistente de 40 lecciones o sesiones de trabajo.

En el apartado 81 se define a la secante que pasa por los puntos P_1 y P_2 de una curva, y al aproximar P_1 a P_2 se obtiene la tangente de la curva en el punto P_1. En el apartado 84 primero observa que si usa la pendiente de la secante entre los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, esta es $(y_2 - y_1)/(x_2 - x_1)$; al aproximar P_2 a P_1, se tendría 0/0, explicando que esta indeterminación surge al no considerar el camino que sigue P_2, es decir, no se ha considerado que ambos puntos pertenecen al círculo. A partir de esta observación, la forma en que encuentra la ecuación de la recta tangente de un círculo en un punto dado en el apartado 84 es similar al método mostrado en el libro de Bowser (2018), aunque la expresión es diferente, la ecuación general del círculo que Tanner y Allen (2011) consideran es $x^2 + y^2 + 2Gx + 2Fy + C = 0$, y la expresión de la recta tangente en el punto $P_1(x_1, y_1)$ a la que llega es la ecuación $x_1x + y_1y + G(x + x_1) + F(y + y_1) + C = 0$. En el apartado 122 discute la forma de encontrar la recta tangente a una cónica de la forma $Ax^2 + By^2 + 2Gx + 2Fy + C = 0$ en un punto P_1, partiendo de la secante entre los puntos P_1 y P_2. Primero menciona que la idea es similar a la empleada en el caso del círculo del apartado 84, y vuelve a hacer notar que si solo considera la pendiente de la secante entre los dos puntos llega a la indeterminación 0/0, problema que surge al no considerar que los puntos pertenecen a la cónica. El procedimiento es el siguiente, como ambos puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ están

Vol 21 | No.106 | septiembre-octubre | 2025
Publicación continua
e4402

en la cónica, resta la expresión $Ax_1^2 + By_1^2 + 2Gx_1 + 2Fy_1 + C = 0$ y la expresión $Ax_2^2 + By_2^2 + 2Gx_2 + 2Fy_2 + C = 0$, obteniendo la Fórmula 7

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{A(x_1 + x_2) + 2G}{B(y_1 + y_2) + 2F}$$

F 7

Esta expresión la sustituye en la ecuación de la secante $y - y_1 = -(x - x_1)(y_2 - y_1) / (x_2 - x_1)$ de P_1 y P_2, quedando como la Fórmula 8

$$y - y_1 = -\frac{A(x_1+x_2)+2G}{B(y_1+y_2)+2F}(x - x_1)$$

F 8

Al aproximarse P_2 a P_1, resulta la Fórmula 9

$$y - y_1 = -\frac{Ax_1 + G}{By_1 + F}(x - x_1)$$

F 9

Finalmente, empleando que el punto pertenece a la cónica, llegan a la expresión indicada en la Fórmula 10

$$Ax_1x + By_1y + G(x + x_1) + F(y + y_1) + C = 0$$

F 10

Los autores sugieren comparar con la expresión de la recta tangente del círculo en el punto $P_1(x_1, y_1)$. Como un ejemplo, encuentra la ecuación del caso en que $A = 0$, $B = 1$, $G = -2p$, $F = 0$ y $C = 0$, es decir que $y^2 = 4px$. Las ecuaciones de las rectas tangentes de la elipse y la hipérbola, centradas en el origen y ejes paralelos a los ejes coordenados, los dejan como ejercicios al final del apartado. Aunque menciona la ecuación general de una cónica, y las traslaciones y rotaciones, no menciona las rectas tangentes para el caso general. Es importante hacer notar que estos autores encuentran la ecuación de la recta tangente primero en casos concretos, luego para el círculo y finalmente para la ecuación de una cónica en general, un aspecto que se enfatiza en el prefacio del libro y que van a seguir en su exposición de los temas. Los capítulos IX, X y XI están dedicados a propiedades de la parábola, elipse e hipérbola, respectivamente, que no dependen del centro de las cónicas, por lo que analiza estas propiedades con las expresiones respectivas centradas en el origen.

ABCAG: Allen y Tanner (2008)

En el prefacio de A brief course in analytic geometry, los autores mencionan que se van a omitir detalles utilizados al presentar los temas en el libro AECAG, precisamente para tener un texto más breve. En el apartado 61 presentan la ecuación de la recta tangente del círculo en el punto $P_1(x_1, y_1)$, en forma similar a la que emplea en AECAG. Cuando va a encontrar la ecuación de la recta tangente para una cónica en un punto dado en el apartado 104, menciona que se puede determinar procediendo en forma similar a la mostrada en el apartado 61, sin dar mayor detalle. Sin embargo, en el apartado 105 da un segundo método en el caso particular de la cónica $Ax^2 + 2Hxy + By^2 + C = 0$. Considera los puntos $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_1 + h, y_1 + k)$ en la cónica, por lo que, la pendiente de la secante que pasa por estos puntos es k/h. Cuando la sedante varía de manera que P_2 se aproxima a P_1 a lo largo de la curva, dicha pendiente se aproxima en el límite a la pendiente de la recta tangente en P_1, mientras h y k se aproximan a cero como un límite, esto es, en notación de los autores, Fórmula 11

$$m_t = limit \left[\frac{h}{k}\right] \text{cuando } h = 0, \text{y } k = 0$$

F 11

Siguiendo un procedimiento similar con el que llegó a la ecuación 2, se llega a Fórmula 12

$$\frac{k}{h} = -\frac{2Ax_1+2Hy_1+Ah+Hk}{2Hx_1+2By_1+Hy+Bx}$$

F 12

Con lo cual Fórmula 13

$$limit_{k=0,h=0}\left[\frac{k}{h}\right] = -\frac{Ax_1 + Hy_1}{Hx_1 + By_1}$$

F 13

Ya con la pendiente, proporciona la ecuación de la recta tangente buscada. Las ecuaciones de las rectas tangentes de la parábola, la elipse y la hipérbola centrada en el origen y ejes paralelos a los ejes coordenados, y de una cónica en general, los dejan como ejercicios al final del apartado.

Comentarios. En estos dos libros, los autores presentan ideas similares a las de (Bowser, 2018; Osgood y Graustein, 2005), aunque las notaciones son diferentes. Sobre propiedades de la tangente, en el libro AECAG, en el apartado 138 se demuestra, con notación diferente, que la tangente de la parábola en cualquier punto forma ángulos iguales con los ejes de la curva y la línea focal en el punto de contacto, y propiedades semejantes para la elipse en el apartado 146, y la hipérbola en el apartado 163, como hace Browser. En cuanto a la aproximación didáctica promovida, los autores parten de ejemplos concretos y de ahí pasan a las formulaciones generales.

GA: Lehmann, CH. (1964)

Sobre el autor Charles H. Lehmann encontramos un obituario en el New York Times, fechado el 2 de enero de 1964, donde se menciona que falleció a los 67 años. Fue jefe del departamento de matemáticas del Defense Training Institute durante la segunda guerra mundial, fue profesor de la Universidad de Nueva York y profesor emérito en Cooper Union. Su libro contiene material para cubrir un curso de geometría analítica plana y del espacio. Está integrado por 148 artículos (apartados), agrupados en 17 capítulos.

El autor menciona que el material del texto es suficiente para desarrollar el curso, por lo que no es necesario complementar con materiales de otros textos. Se afirma que la aproximación didáctica que subyace la organización del material es semejante a una lección oral estructurada en cuatro fases: (1) orientación, (2) motivo, (3) discusión y (4) ejemplos. Después de la presentación del contenido narrativo se incluye una sección de ejercicios. Se presentan, en primer lugar, las ideas familiares y se transita paulatinamente hacia las nuevas ideas. Por ello, cada capítulo inicia con un artículo preliminar. Los resultados de la discusión de un problema o una proposición particular se resumen en forma de teoremas. Además, el autor presenta en forma de tabla o cuadro un resumen de fórmulas y resultados relacionados. En la introducción del texto se indica que en la presentación del material se privilegian los procesos de razonamiento.

El tema de tangente a una circunferencia se aborda en el capítulo IV que trata sobre la ecuación de la circunferencia. El contenido narrativo de este tema abarca de la página 120 a la 127. Antes de presentar la definición de una recta tangente, el autor comenta que generalmente se define la tangente de una circunferencia, en un punto de esta, como una recta que tienen un solo punto en común con la circunferencia, pero que esta definición no es adecuada para curvas planas en general. Luego Lehmann define a la tangente a partir de las rectas secantes en una curva C. Considera la secante que pasa por dos puntos en la curva $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$, deja fijo P_1 y aproximando P_2 a P_1, con lo cual las rectas secantes tienden a una posición límite que es la recta tangente de C en el punto P. Menciona que, aunque podría determinar la pendiente de la recta tangente de una curva en un punto empleando derivadas, prefiere usar métodos geométricos. El procedimiento para encontrar la ecuación de la recta tangente de la curva C en el punto $P_1(x_1, y_1)$ mostrado en el apartado 44 consiste en sustituir la expresión $y = m(x - x_1) + y_1$ en la ecuación de C.

En el caso del círculo ejemplifica esta idea con dos ejercicios resueltos. En el primer ejemplo se encuentra la ecuación de la recta tangente a la circunferencia cuya ecuación es $x^2 + y^2 +2x + 2y -24 = 0$, en el punto (8, 6). Sustituye $y = mx - 8x + 6$ en la ecuación del círculo. Agrupando respecto a x se obtiene la Fórmula 14

$$(m^2 + 1)x^2 - (16m^2 - 14m - 2)x + (64m^2 - 112m + 24) = 0 \qquad \text{F 14}$$

Ya que la tangente toca a la circunferencia en un solo punto, la ecuación cuadrática debe tener una única solución. Esto ocurre cuando el discriminante de la ecuación cuadrática es cero, Fórmula 15

$$(16m^2 - 14m - 2)^2 - 4(m^2 + 1)(64m^2 - 112m + 24) = 0 \qquad \text{F 15}$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática respecto a m se obtienen las soluciones 1/5 y 23/11. No proporciona la expresión general de la recta tangente de un círculo, pero indica que siguiendo estas ideas se pueden resolver otros casos. Respecto a la parábola, en el capítulo VI (apartado 57) encuentra la ecuación de la recta tangente para $y^2 = 4px$ en un punto $P_1(x_1, y_1)$ siguiendo un método similar al empleado en el caso del círculo. Para la elipse (capítulo VII, apartado 63) y para la hipérbola (capítulo VIII, apartado 70) menciona que se procede en forma similar que con el círculo y la parábola. Finalmente, para el caso de la ecuación general de una cónica (capítulo IX, apartado 76), indica que la ecuación de la recta tangente en un punto arbitrario en la curva se encuentra de forma análoga a lo previamente revisado, dejándolo como trabajo para el estudiante. Esto último requiere realizar cálculos que son largos y requieren de ingenio.

Comentarios. El autor proporciona una definición de recta tangente basada en límite, pero los ejemplos resueltos no hacen uso de esa definición y se desarrollan con base en una aproximación algebraica, la cual involucra determinar un parámetro en una ecuación cuadrática de forma que esta tenga una raíz real doble. Lo anterior debido a que el autor considera a la geometría analítica como una asignatura que prepara a los estudiantes para el curso de cálculo diferencial. Se utilizan representaciones gráficas solamente para el análisis de casos generales. Inicia la discusión considerando el caso general de tangente a una curva plana, la cual representa de forma general, considerando el caso de una curva que se encuentra en el primer cuadrante de un sistema coordenado, en el cual representa a la tangente como un caso límite de una familia de secantes. En el texto se abordan conceptos relacionados con la tangente, como el concepto de normal, longitud de la tangente y de la normal, subnormal, subtangente y ángulos entre curvas.

GAT: Oteyza et al. (2015)

Los autores del libro GAT son profesores de matemáticas de la Universidad Nacional Autónoma de México. El libro está enfocado para cursos de bachilleres. Consta de 11 capítulos, los primeros 4 son: Sistemas coordenados 1, Las relaciones y funciones 2, Trigonometría 3 y Logaritmo y exponencial 4. El resto de los capítulos son de Geometría Analítica, cada uno de los corales está dividido en apartados, los referentes a el círculo, la parábola, la elipse y la hipérbola cuentan entre 12 a 15 apartados. Cada capítulo inicia con un ejemplo en el cual están presentes los conceptos o técnicas que se abordan en dicho capítulo. Como reforzamiento, aparte de los ejercicios presentados al final de cada sección, al final de cada capítulo del libro presenta un resumen del capítulo, ejercicios de repaso y ejercicios de lo que llama Geolab, que se pueden realizar en GeoGebra.

La primera definición sobre tangente que tiene el libro es en la sección 7.5: ***una recta es tangente a un círculo si toca a este en un solo punto***. Luego se menciona que esta recta tiene la propiedad de ser perpendicular a la recta que pasa por el centro del círculo y dicho punto y presenta un ejemplo concreto cuya solución emplea esta propiedad. No presenta alguna expresión general de la recta tangente del círculo en un punto. Con esto de antecedente define que, en general, una recta es tangente a una cónica en un punto P de ella si corta a la cónica únicamente en P, y todos los demás puntos de están fuera de la cónica. Para la parábola, elipse e hipérbola, secciones 8.9, 9.11 y 10.12, respectivamente, indica propiedades que cumplen las rectas tangentes a la cónica en un punto para el trazo de las tangentes, demuestra las propiedades y, posteriormente, da las expresiones de las rectas tangentes con las cónicas centradas en el origen y ejes de simetría paralelos a los ejes coordenados. Para los casos en los que el centro está en cualquier punto, por medio de traslaciones determina las expresiones de las tangentes y, para los otros casos, indica, en el mismo capítulo, que se aplique una rotación a la cónica, y luego proceder como en los capítulos previos.

Veamos las propiedades que presenta para el trazo de las rectas tangentes. Para la parábola $y^2 = 4px$, la recta tangente que pasa por el punto P considera a F el foco, y R el punto donde la recta horizontal que pasa por P corta a la directriz. La bisectriz del ángulo RPF, formado por la recta FP y la recta horizontal RP, es la recta tangente a la parábola en el punto P. A continuación se demuestra esta afirmación.

Sea l la directriz de la parábola y sea l' la bisectriz del ángulo RPF. Por propiedades de la parábola, las distancias entre los puntos P y R y de P y F cumplen $d(P, R) = d(P, F)$, por lo que el triángulo RPF es isósceles y así, la recta l' es la mediatriz de RF. Así, para cualquier punto Q de l' se tiene que $d(Q, R) = d(Q, F)$. Si $Q \neq P$, ocurre que $d(Q, l) < d(Q, R)$, luego $d(Q, l) < d(Q, F)$ y, por lo tanto, el punto Q está fuera de la parábola. Ya que esto ocurre para cualquier punto $Q \neq P$ de la bisectriz l', entonces l' es la recta tangente a la parábola en P. No muestra los detalles para llegar a la expresión de la recta tangente, solo indica que, para la parábola $y^2 = 4px$, la recta tangente en el punto $P(x_1, y_1)$ es, Fórmula 16

$$y - y_1 = \frac{y_1}{2x_1}(x - x_1) \qquad \text{F 16}$$

Para la parábola horizontal con vértice en $V(h, k)$, se realiza la traslación $x' = x - h$, y $y' = y - k$, quedando la recta tangente en el punto $P(x_1, y_1)$ como, Fórmula 17

$$y - y_1 = \frac{y_1 - k}{2(x_1 - h)}(x - x_1) \qquad \text{F 17}$$

Las propiedades de la elipse $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ que emplea, si F y F' son los focos, es que la bisectriz del ángulo formado por la recta FP y la recta FP' que, con excepción de P, contiene sólo puntos fuera de la elipse, es la recta tangente a la elipse en el punto P. En el caso de la hipérbola $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$, con focos F y F', la propiedad que considera es que la tangente en el punto P en la bisectriz del ángulo formado por las rectas FP y $F'P$, con excepción de P, está formada por puntos fuera de la hipérbola. De forma análoga al caso de la parábola, demuestra estas propiedades y proporciona la ecuación de la tangente mencionada. Es importante notar que el libro presenta aplicaciones de las cónicas.

Comentarios. Los autores emplean un enfoque geométrico al dar la definición de tangente. Iniciando con la definición para el círculo, y luego para cualquier cónica. En el capítulo 6, presenta a las cónicas como secciones cónicas obtenidas al cortar con un plano a dos conos encontrados en sus vértices, y en la sección 6.3 plantea la traslación. En los capítulos 7, 8, 9 y 10, correspondientes al círculo, parábola, elipse e hipérbola, respectivamente. Primero proporciona y demuestra una propiedad geométrica de la cónica con vértice en el origen y ejes paralelos a los ejes coordenados. A partir de esta propiedad determina la ecuación de la recta tangente. Con traslaciones proporciona la ecuación de la tangente de la cónica con vértice en cualquier punto y ejes paralelos a los ejes coordenados. En el capítulo 11 plantea la rotación, pero no proporciona ecuaciones generales de las rectas tangentes a las cómicas. Aunque presenta construcciones de las cónicas con regla y compás, hilo y papel doblado, no presenta las construcciones empleando las propiedades de las cónicas, pero sí presenta construcciones empleando GeoGebra. Aunque en algunas ocasiones requiere cálculos algebraicos en la solución de los problemas, el enfoque general del libro es geométrico. En este libro se utiliza una aproximación didáctica basada en el uso de ejemplos. Además, se enfatiza la relación entre las representaciones algebraicas y las geométricas, lo cual hace diferente a este texto del resto de los materiales revisados.

DISCUSIÓN

En este trabajo se analizó el contenido narrativo, sobre tangentes de curvas cónicas, de seis libros de texto, con la finalidad de identificar el potencial matemático de tales contenidos. En cuanto al análisis de las categorías a de análisis definidas a priori, nos referimos al método de la secante, o solo secante, a aquel que define a la recta tangente de la curva en un punto P_1 de ella de la manera siguiente: considere rectas secantes que pasan por P_1 y P_2 en la curva, al aproximar el punto P_2 a P_1 se obtiene la recta tangente. Este método, al utilizar la idea de límite, se ubica en las aproximaciones denominadas como analíticas.

Salvo el libro GAT de Oteyza et al. (2015), todos los demás autores emplean el método de la secante como parte de la definición de recta tangente. Aunque los autores no proporcionan una definición general de recta tangente en una curva, ellos definen la recta tangente a una cónica como la recta que toca a esta en un solo punto. En todos los textos, excepto GAT y PSAG, se determina la ecuación de la recta tangente a una circunferencia por el método de las secantes. Osgood y Graustein (2005) la determinan como la recta perpendicular a la recta que pasa por el centro y el punto. Lehmann sustituye y = mx – ma + b en la ecuación del círculo para dar la tangente en el punto P(a, b) del círculo y calcula m. Oteyza et al. (2015), solo presentan un ejemplo concreto usando el método de Osgood y Graustein (2005).

En la determinación de la ecuación de la recta tangente en una cónica en general, (Bowser, 2018; Oteyza et al., 2015) no presentan la ecuación general, pero Browser pide primero aplicar traslaciones y rotaciones a la cónica. Lehmann si la presenta, pero deja su determinación como un ejercicio al lector. Tanner y Allen (2011) presentan la ecuación de la tangente para cónicas en general, pero centradas en el origen, en sus dos libros, sin embargo, en el libro calculan la pendiente de la tangente con límites.

Las ecuaciones de las rectas tangentes en los casos particulares para la parábola, la elipse y la hipérbola únicamente Bowser (2018) los determina en cada uno, aunque en la hipérbola solo pide cambiar ***b*** por ***–b*** en la ecuación de la tangente de la elipse. Oteyza y colaboradores solo dan las ecuaciones de las tangentes. Osgood y Graustein (2005) determinan la tangente de las cónicas en el origen como ejemplos de la ecuación general de la tangente para las cónicas. Los demás autores dejan como ejercicios la determinación de las ecuaciones de las tangentes.

Todos los libros presentan, de una forma u otra, las ecuaciones de las rectas tangentes de las cónicas centradas en el origen, aunque no todos la determinan. Oteyza et al. (2015), solo presentan un ejemplo concreto para determinar las ecuaciones de las rectas tangentes. Sin embargo, únicamente en los libros PSAG y ABCAG se emplea explícitamente una notación de límites para determinar la pendiente de la recta tangente. En la Tabla 2 se muestra un resumen de las observaciones anteriores.

Tabla 2: Resumen del análisis.

Título	Definición	Círculo	Parábola	Elipse	Hipérbola	Cónica	Aplicaciones
AETAG	Secantes	Secante	Secante	Secante	–b por b	T y R	No
PSAG	Secantes	Perpendicular	Ejemplo	Ejemplo	Ejemplo	General Límite	Si
AECAG	Secantes	Secante	Ejercicio	Ejercicio	Ejercicio	Origen Secante	No
ABCAG	Secantes	Secante	Ejercicio	Ejercicio	Ejercicio	Origen Límite General Ejercicio	No
GA	Secantes	Recta	Ejercicio	Ejercicio	Ejercicio	Ejercicio	No
GAT	No. Punto	Particular	Ecuación	Ecuación	Ecuación	No	Si
Notación: Secantes- método de secantes. Punto - solo en cónica, como recta que toca un punto. Perpendicular - como perpendicular recta por centro y punto. Límite- determina la pendiente de la tangente con límites. Ecuación - solo da la ecuación de la recta tangente. R y T -no da la forma general, solo menciona usar traslaciones y rotaciones. Recta – sustituye y = mx – ma + b en la ecuación del círculo.							

Fuente: Elaboración propia

CONCLUSIONES

Con base en la fase inductiva del análisis se identificaron tres categorías para los ejemplos resueltos: (a) ejemplos concretos, (b) ejemplos específicos, y (c) ejemplos generales. Los ejemplos concretos se refieren a casos donde se dan valores numéricos a los parámetros de las ecuaciones cuadráticas, los ejemplos específicos se refieren a aquellos donde se proponen casos especiales de los parámetros en las ecuaciones generales de cada cónica y (c) los ejemplos generales se refieren a la obtención de rectas tangentes para los casos más generales de las ecuaciones de segundo grado.

En cuanto a las oportunidades de aprendizaje relacionadas con el tipo de ejemplos resueltos es importante subrayar que el uso de casos concretos es un dispositivo didáctico de utilidad, ya que esta acción sigue la ruta natural del aprendizaje, postulado por las aproximaciones didácticas basadas en el constructivismo, que va de lo concreto a lo abstracto. Sin embargo, la mayoría de los textos apuestan por mayores niveles de generalidad para simplificar la presentación del material, excepto en el caso del libro PSAG quienes parten inicialmente de casos concretos que constituye un caso típico, incrementando el nivel de generalidad en el tratamiento de los casos. Otra categoría que emergió se refiere al tipo de representaciones gráficas empleadas, ya que estas solo se utilizan para ejemplificar los procedimientos de mayor generalidad.

El principal aporte de este trabajo es metodológico, ya que propone una estrategia para analizar el contenido de libros de texto de matemáticas a partir de un proceso de análisis cualitativo de contenido, complementado con la perspectiva de análisis desde un punto de vista matemático, propuesta por Stylianides (2014). Entre las oportunidades de aprendizaje que ofrece el contenido sobre rectas tangentes de los libros analizados destaca la prevalencia de la definición de recta tangente como límite de una familia de rectas tangentes. Algunas limitaciones del trabajo consisten en que no se comparan textos de geometría analítica que siguen una aproximación tradicional, para la presentación del contenido, con aquellos textos que siguen una aproximación vectorial. En lo que respecta a las oportunidades de aprendizaje que ofrece el contenido sobre rectas tangentes destaca la noción de tangente como límite de secantes (aproximación analítica), dejando de lado otras aproximaciones importantes que podrían ser de utilidad para el desarrollo del pensamiento matemático. Lo anterior se debe a que la geometría analítica, desde el punto de vista de la mayoría de los textos revisados, se concibe como una materia preparatoria para los cursos de cálculo.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Allen, J., & Tanner, J. H. (2008). *A brief course in analytic geometry*. BiblioBazaar.

Basyal, D., Jones, D.L., & Thapa, M. (2023). Cognitive demand of mathematics tasks in Nepali middle school mathematics textbooks. *International Journal of Science and Mathematics Education, 21*, 863–879. https://doi.org/10.1007/s10763-022-10269-3

Bell, J.L. (2019). The Sixteenth and seventeenth centuries. The founding of the infinitesimal calculus. In J. L. Bell (Ed.), *The Continuous, the Discrete and the Infinitesimal in Philosophy and Mathematics* (pp. 41-76). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-18707-1_2

Blazar, D., Heller, B., Kane, T. J., Polikoff, M., Staiger, D. O., Carrell, S., Goldhaber, D., Harris, D. N., Hitch, R., Holden, K. L., & Kurlaender, M. (2020). Curriculum reform in the Common Core era: Evaluating elementary math textbooks across six U.S. states. *Journal of Policy Analysis and Management, 39*(4), 966–1019. https://doi.org/10.1002/pam.22257

Bowser, E. A. (2018). *An Elementary Treatise on Analytic Geometry: Embracing Plane Geometry (Classic Reprint)*. Forgotten Books.

Ceano, R. (2020). El problema de las curvas y el nacimiento del cálculo. *Pensamiento Matemático, 10*(1), 95–108. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=7762606

Dhombres, J. (2024). A New cycloid narrative centered on Torricelli and Roberval to understand the diverse ways of the mathematical revolution. In R. Pisano, J. Dhombres, P. R. Grave & P. Busotti (Eds.), *Homage to Evangelista Torricelli's Opera Geometrica 1644–2024. Logic, Epistemology, and the Unity of Science* (pp. 107-187). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-031-06963-5_4

Fan, L., Cheng, J., Xie, S., Luo, J., Wang, Y., & Sun, Y. (2021). Are textbooks facilitators or barriers for teachers' teaching and instructional change? An investigation of secondary mathematics teachers in Shanghai, China. *ZDM Mathematics Education, 53*, 1313–1330. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01306-6

Farouki, R. T. (2022). The Cartesian Ovals. The *Mathematics Intelligencer 44*, 343–353. https://doi.org/10.1007/s00283-021-10149-8

Jäder, J., Lithner, J., & Sidelval, J. (2020). Mathematical problem solving in textbooks from twelve countries. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 51*(7), 1120-1136. https://doi.org/10.1080/0020739X.2019.1656826

Johnston, D. C. (2019). Cycloidal paths in physics as superpositions of translational and rotational motions. *American Journal of Physics, 87*, 802-814. https://doi.org/10.1119/1.5115340

Keppens, D. & Keppens, K. (2021). A survey on conics in historical context: An overview of definitions and their relationships. *International Journal of Geometry, 10*(2), 50–66. https://bit.ly/3FaOwaa

Kuckartz, U. & Rädiker, S. (2023). *Qualitative content analysis*. Sage.

Kuzniak, A. (2022). The theory of Mathematical Working Spaces—theoretical characteristics. In A. Kuzniak, E. Montoya-Delgadillo & P. R. Richard (Eds.), *Mathematical Work in Educational Context* (pp. 3–31). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-90850-8_1

Lehmann, Ch. (1964). *Geometría Analítica*. https://www.todostuslibros.com/libros/geometria-analitica_978-968-18-1176-1

Liu, J., Liu, Q., Zhang, J., Shao, Y., & Zhang, Z. (2022) The trajectory of Chinese mathematics textbook development for supporting students' interest within the curriculum reform: a grade eight example. *ZDM Mathematics Education, 54*, 625–637. https://doi.org/10.1007/s11858-022-01372-4

Oteyza, E., Lam, E., Hernández, C., Carrillo, A., & Ramírez, A. (2015). *Geometría analítica y trigonometría* (3ª. Ed.). Pearson.

Osgood, W. F. & Graustein, W. C. (2005). *Plane and solid analytic geometry*. University of Michigan.

Pepin, B. & Gueudet, G. (2020). Curriculum resources and textbooks in mathematics education. In S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education* (pp. 172–176). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-030-15789-0_40

Polat, S. & Dede, Y. (2023). Trends in cognitive demands levels of mathematical tasks in Turkish middle school mathematics textbooks: Algebra learning domain. *International Journal for Mathematics Teaching and Learning, 24*(1), 40–61. https://doi.org/10.4256/ijmtl.v24i1.476

Rachelli, J. y Martins, P. D. C. (2021). Máximos e mínimos de funções: um estudo com base em problemas históricos. *Boletim Cearense de Educação e História da Matemática, 8*(24), 65–83. https://doi.org/10.30938/bocehm.v8i24.5359

Rashed, R. (2018). *Fermat et les débuts modernes de la géométrie*. Olms-Weidmann.

Rezat, S., Fan, L., & Pepin, B. (2021). Mathematics textbooks and curriculum resources as instruments for change. *ZDM Mathematics Education, 53*, 1189–1206. https://doi.org/10.1007/s11858-021-01309-3

Rivera-Figueroa, A., & Cruz-Canales, J. L. (2024). Tangent lines that neither touch nor cross the curves at the points of tangency. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1–35. https://doi.org/10.1080/0020739X.2024.2352422

Stylianides, J. G. (2014). Textbook analyses on reasoning-and-proving: Significance and methodological challenges. *International Journal of Educational Research, 64*, 63-70. https://doi.org/10.1016/j.ijer.2014.01.002

Tanner, J. H. & Allen, J. (2011). *An elementary course in analytic geometry*. Nabu Press.

Valdez, J. N. (2024). A resolução de problemas de cálculo diferencial e a construção da linha tangente a una curva. *VIDYA, 44*(2), 247–264. https://doi.org/10.37781/vidya.v44i2.5123