

14

DESARROLLO DE HABILIDADES PARA LA SELECCIÓN DEL MÉTODO MÁS ADECUADO PARA LA SOLUCIÓN DE ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS DE ORDEN SUPERIOR

DEVELOPING SKILLS FOR SELECTING THE MOST APPROPRIATE METHOD FOR THE SOLUTION OF SUPERIOR ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS

Lic. António Camunga Tchikoko¹

E-mail: antoniocamunga1987@gmail.com

Dr. C. Lorgio Félix Batard Martínez¹

E-mail: lorgio@uclv.edu.cu

¹Universidad Central Marta Abreu de Las Villas. Santa Clara. Cuba.

Cita sugerida (APA, sexta edición)

Camunga Tchikoko, A., & Batard Martínez, L. F. (2017). Desarrollo de habilidades para la selección del método más adecuado para la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior. *Revista Conrado*, 13(58), 82-88. Recuperado de <http://conrado.ucf.edu.cu/index.php/conrado>

RESUMEN

En este trabajo se expone el resultado obtenido de la investigación realizada a los alumnos de 3er años de la carrera de Matemática del grupo 2016-2017, del Instituto Superior de Ciencias de Educación del Huambo (Angola) con el objetivo de conocer como ellos seleccionan el método más idóneo a la hora de resolver Ecuaciones Diferenciales Ordinarias no Homogéneas de Orden Superior. Se propone un material didáctico cuyo propósito está encaminado a desarrollar habilidades en el tema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Orden Superior de maneras que los estudiantes sepan elegir en cada caso el método más idóneo de solución de acuerdo con las características de la ecuación diferencial que está resolviendo. Se inserta un grupo de ejercicios propuestos donde se combinan los diferentes métodos, con este procedimiento didáctico los estudiantes logran sacar conclusiones personales sobre la eficiencia de cada método.

Palabras clave:

Ecuaciones diferenciales, habilidades, selección del método adecuado.

ABSTRACT

The result of a research is presented, conducted with 3rd year Math students, group 2016-2017 of the Higher Institute of Education Sciences in Huambo (Angola). Aimed at knowing how they select the most appropriate method when solving Higher Order Ordinary Differential Non-Homogeneous equations. A didactic material is proposed to develop skills in solving Higher Order Ordinary Differential Equations in a way that students will choose in each case the most appropriate method of solution according to the characteristics of the equation to be solved. A set of exercises is proposed where different methods are combined. With this didactic procedure the students manage to draw personal conclusions about the efficiency of each method.

Keywords:

Differential Equations, skills, selecting the right method.

INTRODUCCIÓN

Uno de los objetivos de la Formación de Profesores para Angola, según la Ley de Bases de la Educación (República de Angola. Asamblea Nacional, 2001), es *“formar profesores con sólidos conocimientos científico-técnicos y una profunda consciencia patriótica de modo que asuman con responsabilidad la tarea de educar las nuevas generaciones”*.

La educación constituye uno de los principales activos, y mecanismos de transformación de un pueblo y es el papel de la escuela, de forma comprometida con la promoción del ser humano en su integridad, estimular la formación de valores, hábitos y comportamientos que respeten las diferencias y las características propias de grupos y minorías. Así, la educación es esencial en el proceso de formación de cualquier sociedad y abre caminos para la ampliación de la ciudadanía de un pueblo.

Las ecuaciones diferenciales juegan un papel fundamental dentro de las matemáticas como en otras áreas de la ciencia como la física, la química, la astronomía, la biología etc. debido a que permiten modelar una gran variedad de fenómenos que ocurren en la naturaleza.

La enseñanza de las matemáticas se ha convertido en un espacio de gran importancia para la humanidad y a la vez de gran interés científico. Según plantea González (1989), la sociedad reclama el tener conocimientos matemáticos, resulta difícil encontrar áreas del saber en las que no hayan hecho su aporte las matemáticas. Estudios realizados (Lapointe, Mead & Philips, 1989) muestran cómo la mayoría de las personas que no alcanzan el nivel de alfabetización mínimo como para desenvolverse en una sociedad moderna, encuentran las matemáticas aburridas y difíciles y se sienten inseguras a la hora de resolver problemas aritméticos sencillos; por otra parte, el tener conocimientos matemáticos se convierte en un importante filtro selectivo del sistema educativo

Por lo tanto el desarrollo de nuevas metodologías para fortalecer los procesos de enseñanza, surge como una necesidad para el fomento de la investigación matemática, tomadas desde el razonamiento lógico, que permita al estudiante no solo memorizar instrucciones sino entender y comprender su amplio sentido. Según expresa Whitehead (1965), “Uno de los mayores problemas con que se enfrentan las matemáticas es el de explicar a los demás de qué tratan.

DESARROLLO

Principales habilidades en Ecuaciones Diferenciales

- Resolver; Hallar; Demostrar; Identificar; Reconocer; Comparar; Construir; Representar y aplicar.

Las ecuaciones diferenciales proporcionan un medio eficaz tanto para resolver numerosas cuestiones prácticas de ingeniería y ciencias en general, como problemas puramente matemáticos. Es sin duda una de las ramas de las matemáticas que mejor permite el desarrollo del pensamiento lógico.

El proceso de enseñanza-aprendizaje de las Ecuaciones diferenciales y su importancia en el desenvolvimiento de habilidades.

El proceso de enseñanza-aprendizaje es el que se presenta para su estudio y mejor comprensión mediante tres principios reguladores de tal proceso, a saber:

1. De lo fácil a lo difícil.
2. De lo simple a lo complejo.
3. De lo concreto a lo abstracto.

Esto se establece en las escuelas o instituciones educativas por medio de la organización curricular en los planes y programas de estudio de las diversas escuelas o instituciones de educación.

Desde el punto de vista de la investigación se ha podido constatar que existen dificultades por parte de los estudiantes del 3^a año de la carrera de matemática del ISCED -Huambo-Angola a la hora de identificar el método adecuado a utilizar para solucionar una EDONH, aunque se dispone en realidad de pocos métodos en este sentido. Algunas investigaciones recientes han presentado resultados de dificultades en resolver EDO. Habre (2000), identificó las diferentes estrategias que utilizan los estudiantes al resolver EDO, y Rasmussen (2001), desarrolló un marco para interpretar la comprensión de los estudiantes y las dificultades que tienen con ideas matemáticas centrales de las ecuaciones diferenciales. Camacho, Perdomo & Santos Trigo (2007), observaron que, en líneas generales, la idea que tienen los estudiantes de resolver una ecuación diferencial se reduce a la aplicación de algoritmos específicos de clasificación y resolución de las EDO.

Las habilidades forman parte del contenido de enseñanza e implica poseer el dominio de las formas de la actividad cognoscitiva, práctica y valorativa, en otras palabras es poner el conocimiento en acción. Las investigaciones que se han llevado a cabo sobre las habilidades se han

determinado que su base están en el dominio de los conceptos (Brito 1984; Valera 1990), los cuales se concretizan en las habilidades que se desarrollen en el estudiante. Así el dominio de un concepto en particular no está en poder repetirlo textualmente, sino en la posibilidad de actuar, de aplicarlo a nuevas situaciones, de valorar su importancia para sí mismo y para el estudio de su carrera.

Principales dificultades que presentan los alumnos en el proceso de enseñanza-aprendizaje en las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior:

- Los alumnos no saben elegir el método más conveniente para hallar una solución particular para solucionar EDO de orden superior no homogéneas
- No saben plantear la ecuación característica
- Los alumnos no tienen una adecuada actualización de la operatoria algebraica, aprendidas en los cursos anteriores como: números complejos, descomposición en factores, método de Ruffini, raíces de la ecuación de segundo grado
- Otra dificultad consiste en la determinación de la forma de la solución particular para aplicar el método de coeficientes indeterminados
- Falta de un material didáctico adecuado que facilite el desarrollo de habilidades para soluciones de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior donde se combinan diferentes métodos
- No utilizan de manera racional el principio de superposición para facilitar la búsqueda de la solución particular de una EDOLNH
- En general no se orienta de manera adecuada el trabajo independiente de manera que se logre la implicación, motivación e independencia de los estudiantes en el proceso de ejecución de las tareas

Con la intención general de lograr altos niveles de calidad en la preparación de los estudiantes del 3º año del ISCED – Huambo (Angola), se propuso un material didáctico para desarrollar habilidades en la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior no homogéneas, por los métodos de coeficiente indeterminado, variación de constante, operadores lineales y transformadas de Laplace.

Orientación para la selección de los métodos idóneos para resolver ecuaciones diferenciales ordinarias.

1. Coeficiente indeterminado

Al resolver una Ecuación diferencial lineal no homogéneas con coeficientes constantes de orden

$$n: a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

$$n: a_n y^{(n)} + a_{n-1} y^{(n-1)} + \dots + a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = f(x)$$

Cuando en el miembro derecho de la ecuación hay términos con polinomios, exponenciales, seno y coseno o un producto de estas funciones, sugerimos que se siga **el método de los coeficientes indeterminados**. Y sugerimos que se utilice la descomposición por el principio de superposición

2. Variación de constantes

Este método sugerimos usarlo en funciones no incluidas en el caso 1. Es más general que el anterior pues incluso puede ser usado cuando resolvemos EDO con coeficientes variables, siempre que conozcamos la solución general de la ecuación homogénea correspondiente. Las dificultades que pueden surgir al aplicar este método dependen de la complejidad de las integrales que debamos resolver al final del procedimiento.

Aplicar en este método el principio de superposición es también importante para simplificar los cálculos.

3. Método de Operadores

Este método es algunas veces útil en el sentido de que se pueden obtener soluciones más rápidamente que con los métodos de coeficientes indeterminados o variación de constantes, siempre que el estudiante desarrolle habilidades para trabajar con las fórmulas expresadas en la presente tesis al describir el método.

Nótese que por lo expuesto anteriormente al describir este método, el mismo puede ser utilizado cuando $f(x)$ tiene una forma similar al caso de los coeficientes indeterminados, y la habilidad y experiencia desarrollada por el estudiante le inclinará hacia la utilización de uno u otro método.

4. Transformada de Laplace

Este método tiene varias ventajas sobre otros métodos. En primer lugar, usando el método podemos, transformar ecuaciones diferenciales dadas en ecuaciones funcionales. En segundo lugar, las condiciones iniciales dadas automáticamente se incorporan en el problema transformado de modo que no se necesita hacer ninguna consideración especial sobre ellas. Finalmente, el uso de tablas de transformadas de Laplace directas e inversas pueden reducir el trabajo de obtener soluciones lo mismo que las tablas de integrales reducen el trabajo de integración.

Aclaremos que es muy importante al utilizar este método precisar si en las clases de funciones donde trabajamos existe la transformada de Laplace, por ejemplo, si son funciones continuas o seccionalmente continuas de orden exponencial.

Este método resulta particularmente útil cuando las funciones involucradas son continuas y además del orden exponencial, y cuando el orden de la ecuación diferencial sea elevado y se dificulte la solución de la ecuación característica.

Observación importante

Cuando no se puede aplicar ninguno de los métodos ya referenciados hay que recurrir a los métodos numéricos.

Ejercicios propuestos

El objetivo fundamental de este grupo de ejercicios es combinar los diferentes métodos para que el propio alumno desarrolle habilidades y saque sus conclusiones personales acerca de la efectividad de cada método en cada caso.

1. Resuelva cada una de las ecuaciones diferenciales en los problemas 1 a 9 por Coeficientes indeterminados y Operadores. Compare la eficiencia de los dos métodos en cada caso.

1. $y'' - y = 1$
2. $y'' + y = 3\text{sen}2x + x\text{cos}x$
3. $y'' - y' + y = x^3 - 3x^2 + 1$
4. $y'' + 4y' + 4y = x^3 e^{-2x}$
5. $y''' - 4y'' + 3y' = x^2$
6. $y''' - 3y'' + 3y' - y = e^x \text{cos}2x$
7. $y^{IV} + 3y''' - 15y'' + 30y' = e^{4x}$
8. $y^{IV} + 10y''' + 9y = \text{cos}(4x + 6) + \text{sen}(2x + 3)$

2. Resuelva cada una de las ecuaciones diferenciales en los problemas 9 a 14 por Coeficientes indeterminados, variación de constantes y transformadas de Laplace. En cada caso diga cuál es el más eficiente.

9. $y'' + 4y = 9x, y(0) = 0, y'(0) = 7$
10. $y'' - y = x + \text{sen}x, y(0) = 0, y'(0) = 3$
11. $y'' - 4y' + 4y = 2e^{2x} + \text{cos}x, y(0) = \frac{3}{25}, y'(0) = -\frac{4}{25}$
12. $y''' - y'' - y' + y = 4xe^x, y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$
13. $y''' - y' = \text{sen}x, y(0) = y'(0) = y''(0) = 0$

3. Hallar la solución general de las siguientes ecuaciones diferenciales aplicando el método más idóneo en cada caso

14. $y'' - 3y' + 2y = \frac{e^{2x}}{1 + e^{2x}}$
15. $y'' - 2y' + 2y = 3x + e^x \text{tag}x$
16. $y'' + 3y' + 2y = \text{sen}(e^x)$
17. $y'' - 2y' + y = xe^x + 4, y(0) = y'(0) = 1$
18. $y'' + 4y = x^2 + 3e^x, y(0) = 0, y'(0) = 2$
19. $y'' + y = \text{sec}^3 x, y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}$
20. $y''' - 4y' = xe^{2x} + \text{sen}x + x^2$
21. $y''' - 2y'' + y' = 2 - 24e^x + 40e^{5x}, y(0) = \frac{1}{2}, y'(0) = \frac{5}{2}, y''(0) = -\frac{9}{2}$
22. $y^{IV} - 2y''' + y'' = x^3$
23. $y^{IV} - y = 8e^x; y(0) = 0, y'(0) = 2, y''(0) = 4, y'''(0) = 6$
24. $y^{IV} - 2y''' + 2y'' - 2y' + y = e^x$
25. $y^{IV} + 2y''' + 2y'' + 2y' + y = xe^x + \frac{\text{cos}x}{2}$

Análisis de los resultados

Para la realización del trabajo se aplicó un cuestionario a los estudiantes, se aplicó a 30 estudiantes dentro de un universo de 54 estudiantes.

Pregunta 1. Sus resultados en la asignatura Ecuaciones Diferenciales fueron:

_____ Bueno _____ Regular _____ No bueno _____ Otro

Pregunta 2. Indique cuál de las siguientes opciones afectó su nivel de aprovechamiento en el tema de Ecuaciones Diferenciales?

___ Falta de bibliografía, ___ Falta de medios, ___ Falta de dominio de la materia ___ Falta de ejercicios para practicar ___ Falta de buen esclarecimiento por el profesor ___ Contenido muy complejo ___ Contenido muy extenso ___ Contenido accesible ___ Buena explicación del profesor ___ Estudio independiente

Pregunta 3: Cuantos métodos aprendieron para resolver Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Orden Superior no Homogénea?

¿Cuáles son?

Pregunta 4: Qué método utilizarías para resolver la siguiente ecuación diferencial

$$y''' - 3y'' + 2y' = \frac{e^x}{1 + e^{-x}}$$

Pregunta 5: Consideras necesario un material didáctico con orientaciones para la identificación del método a utilizar en la solución de Ecuaciones Diferenciales ordinarias?

Sí _____ No _____

Pregunta 6. Qué ventajas posee un material didáctico sobre el tema de Ecuaciones Diferenciales ordinarias de orden superior no homogéneas?

_____ Facilita el estudio independiente de los estudiantes;

_____ Contribuye a profundar e integrar los conocimientos y concentrarse en el objetivo;

_____ Ayuda a ejercitar en el colectivo;

_____ Ayuda a ver las partes teóricas más importantes;

_____ Aumenta el interés por el estudio de la asignatura.

Análisis de los resultados de la encuesta aplicada a los estudiantes.

Al analizar los resultados de la encuesta realizada a los estudiantes del grupo en el 2016, se pudo constatar que en la *pregunta 1*, el 36,7 % de los estudiantes dicen que su aprovechamiento es bueno, el 50 % de los estudiantes dicen que su aprovechamiento es regular y el 13,3% de los estudiantes dicen que su aprovechamiento es malo.

Con respecto a la *pregunta 2*, el 67,7 % de los alumnos consideran que los principales elementos que afectarán en su aprovechamiento en la asignatura EDO es una buena explicación del profesor, el 76,7 % dicen que es la falta de bibliografía lo que demuestra que con una buena orientación del estudio independiente, que podría realizarse a través de un material didáctico lo que permitiría potenciar el aprendizaje de los alumnos en EDO.

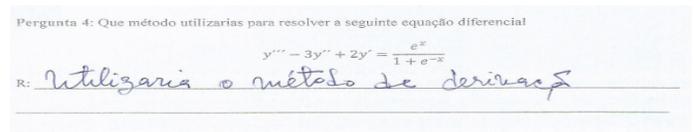
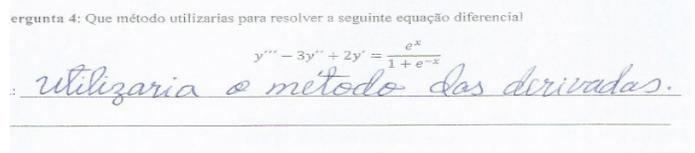
En la *pregunta 3*, el 73,3 % de los encuestado no responden a la pregunta, el 33,3 % responden pero erradamente lo que quiere decir que los alumnos no conocen los métodos para solucionar ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior con coeficientes constantes y el material que se propone puede ayudar en este sentido.

En la *pregunta 4*, se muestra las respuestas de los estudiantes la pregunta fue: que método utilizarías para resolver la siguiente ecuación:

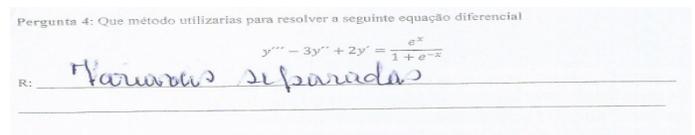
$$y''' - 3y'' + 2y' = \frac{e^x}{1 + e^{-x}}$$

Respuestas de los estudiantes en la *pregunta 4*

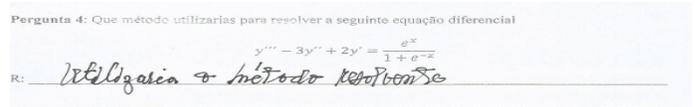
Dos estudiantes coinciden en decir que utilizarían el método de derivadas



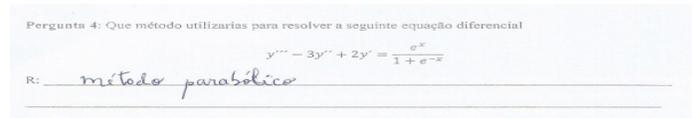
El otro dice que utilizaría el método de variables separadas



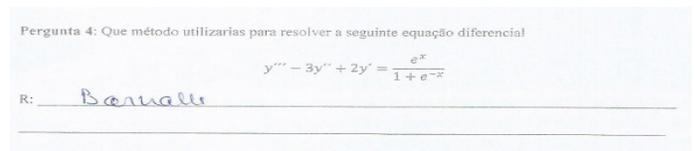
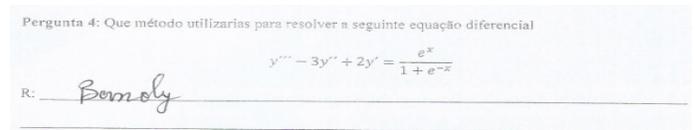
El otro dice que utilizaría el método resolvente



El otro dice que utilizaría el método parabólico



Los otros dos dicen que utilizarían el método de Bernoulli.



Los demás no responden a la pregunta. En resume:

El 20 % responden a la pregunta cómo se observa erradamente, el 73,3% no responden, el 6,7 % sus respuesta son aparentemente ciertas lo que significa que hay muchos problemas con la aplicación de los métodos para solucionar las ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior con coeficientes constantes. El material

didáctico que se propone puede ser una de las vías para minimizar este problema.

La *pregunta 5* la necesidad de un material didáctico, el 86,7% de los encuestados coincide en afirmar que es necesario un material didáctico que facilita la identificación del método a utilizar en la solución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de orden superior, el 3,3 % no consideran necesario un material didáctico. Se puede observar que un material didáctico con enfoque metodológico puede ayudar al mejoramiento del aprendizaje de los estudiantes en las soluciones de Ecuaciones diferenciales por diferentes métodos.

En la *pregunta 6* el 50 % de los encuetados coinciden en afirmar que un material didáctico tiene la ventaja de facilitar el estudio independiente.

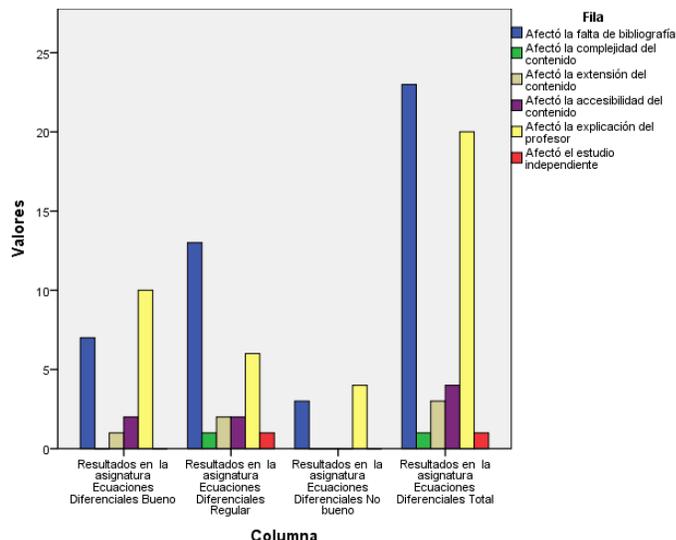
El aprendizaje de conceptos matemáticos requiere que los estudiantes desarrollen estrategias y habilidades para resolver problemas en distintos contextos, reflexionando, seleccionando y discriminando, de su catálogo de recursos, las herramientas necesarias en cada momento. El análisis que se acaba de mostrar refleja que los estudiantes no han logrado desarrollar estas competencias particularmente en la solución de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de orden superior.

Al cruzar los datos obtenemos que los principales elementos que influyeron en el aprendizaje de los alumnos fueron la explicación del profesor y la falta de bibliografía el material didáctico que se propone puede ser una de las vías para minimizar estos problemas.

Tabla de los datos cruzados

Afectaciones	Resultados en la asignatura Ecuaciones Diferenciales			
	Bueno	Regular	No bueno	Total
Afectó la falta de bibliografía	7	13	3	23
Afectó la complejidad del contenido	0	1	0	1
Afectó la extensión del contenido	1	2	0	3
Afectó la accesibilidad del contenido	2	2	0	4
Afectó la explicación del profesor	10	6	4	20
Afectó el estudio independiente	0	1	0	1

Grafica de los datos cruzados



Por el diagnóstico que hice con los estudiantes del 3er año de Matemática del Instituto Superior de Ciencias de la Educación del Huambo (Angola), comprobamos que los estudiantes, no saben elegir el método más efectivo, y por lo general utilizan solamente el método de coeficiente indeterminado.

CONCLUSIONES

Se pudo constatar que los alumnos de 3er año del curso de Matemática del Instituto Superior de Ciencias de la Educación del Huambo (Angola) presentan dificultades de selección del método más idóneo a la hora de resolver una ecuación diferencial ordinaria de orden superior con coeficientes constantes, aún disponen de poca cantidad de métodos para solucionar una EDONH.

Hay pocos materiales didácticos al alcance de los estudiantes con ejercicios resueltos y propuestos que permiten el desarrollo de habilidades de selección del método más idóneo en la solución de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden superior.

En el trabajo se describe y se aplican los métodos de los coeficientes indeterminados, variación de parámetros, operadores y transformadas de Laplace y se dan sugerencias específicas para soluciones de las ecuaciones diferenciales.

En el proceso docente-educativo de la Matemática en el Instituto Superior de Ciencias de la Educación de Huambo (Angola) existen insuficiencias en el desarrollo de habilidades relacionadas con la aplicación de los diferentes métodos para solucionar EDO.

De la pesquisa realizada permitió detectar los intereses de los alumnos por los materiales didácticos para sus estudios independientes. Existen dificultades en el estudio del tema de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias de Orden Superior no homogéneas con coeficiente constantes, debido a la poca preparación de los alumnos, la falta de libros y materiales para la auto preparación lo que dificulta el Proceso de Enseñanza-Aprendizaje de esta asignatura Ecuaciones Diferenciales.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Brito Fernández, H. (1984). Hábitos, habilidades y capacidades. *Revista Varona*, 6(13).
- Camacho, M., Perdomo, J., & Santos Trigo, M. (2007). La resolución de problemas en los que interviene el concepto de Ecuación Diferencial Ordinaria: Un estudio exploratorio, *XI Simposio de la SEIEM*. Tenerife.
- González, O. (1989). La formación de habilidades generales para la actividad de estudio. La Habana: Universidad de La Habana.
- Habre, S. (2000). Exploring students' strategies to solve ordinary differential equations in a reformed setting. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(4), 455-472.
- Lapointe, A., Mead, N., y Philips, G. (1989). *It's a World of Differences: An Assessment of Mathematics and Science*. Princeton: Educational Testing Service.
- Rasmussen, C. (2001). New directions in differential equations. A framework for interpreting students' understandings and difficulties. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 55-87.
- República de Angola. Asamblea Nacional. (2001). Lei de Bases do Sistema de Educação. (Lei N.º 13/01, de 31 de Dezembro). Luanda: Assembleia Nacional.
- Valera Alfonso, O. (1990). Formación de hábitos y habilidades. *Revista Ciencias Pedagógicas*, 11(20), 20-38.
- Whitehead. A. N. (1965). Mathematics and Liberal Education. *Journal of the Association of Teachers of Mathematics for the Southeastern Part of England*, 1(1).
- Zill, D., & Cullen, M. (2009). Ecuaciones Diferenciales con problemas con valores en la frontera (7maed). Mexico: Cengage Learning Editores S.A.