

# 25

## EMPLEO DEL SOFTWARE GEOGEBRA COMO MEDIO AUXILIAR HEURÍSTICO PARA EL TRATAMIENTO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS Y SUS OPERACIONES

USE OF THE GEOGEBRA SOFTWARE AS AUXILIARY HEURISTIC MEANS FOR THE TREATMENT OF COMPLEX NUMBERS AND THEIR OPERATIONS

Manuel Toto<sup>1</sup>

E-mail: [manueltotomanuel@hotmail.com](mailto:manueltotomanuel@hotmail.com)

ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0746-0304>

Raúl López Fernández<sup>2</sup>

E-mail: [raulito\\_p@yahoo.com](mailto:raulito_p@yahoo.com)

Tomás Crespo Borges<sup>3</sup>

E-mail: [tpcrespo@uclv.cu](mailto:tpcrespo@uclv.cu)

<sup>1</sup> Instituto Superior de Ciencias Policiales y Criminal. Angola.

<sup>2</sup> Convenio Universidad Metropolitana de Ecuador- Universidad de Cienfuegos, Cuba.

<sup>3</sup> Universidad Central "Marta Abreu" de Las Villas. Santa Clara. Cuba.

### Suggested citation (APA, sixth edition)

Toto, M., López Fernández, R., & Crespo Borges, T. (2019). Empleo del software Geogebra como medio auxiliar heurístico para el tratamiento de los números complejos y sus operaciones. *Revista Conrado*, 15(67), 189-193. Recuperado de <http://conrado.ucf.edu.cu/index.php/conrado>

### RESUMEN

En la introducción de los programas de Funciones Analíticas del Instituto Superior de Ciencias de la Educación en la República de Angola se imparte el tema Números Complejos, que como tendencia presentan dos dificultades para el aprendizaje de los alumnos, por un lado la poca relación que se establece en la clase entre el cálculo algebraico y la representación gráfica de los resultados y por otro, la dificultades en el cálculo de potencias y raíces de números complejos mediante el empleo de la forma trigonométrica. En este trabajo los autores proponen desarrollar y aplicar las posibilidades que ofrece Geogebra como alternativa de solución a los problemas planteados.

#### Keywords:

Números Complejos, heurística, Geogebra

### ABSTRACT

In the introduction of the Analytical Functions programs of the Higher Institute of Education Sciences in the Republic of Angola, the issue of Complex Numbers is taught, which as a tendency presents two difficulties for the students' learning, in one hand, the little relation established in the class between the algebraic calculation and the graphical representation of the results and, on the other hand, the difficulties in the calculation of powers and roots of complex numbers through the use of the trigonometric form. In this work the authors propose to develop and apply the possibilities offered by Geogebra as an alternative solution to the posed problems.

#### Palabras clave:

Complex Numbers, heuristics, Geogebra.

## INTRODUCCIÓN

El concepto de número complejo apareció como resultado de la necesidad de los matemáticos de sistematizar los cálculos y esta necesidad se evidenció desde épocas relativamente tempranas, ya que hasta las más sencillas operaciones algebraicas con números reales se salen del marco del campo de estos números.

Ejemplo, es conocido que no toda ecuación algebraica puede ser resuelta con números reales; por consiguiente, es necesario renunciar a la aplicación automática de los métodos de solución establecidos y en cada caso investigar minuciosamente las posibilidades de aplicación de dichos métodos o ampliar el campo de los números reales, de manera que las operaciones algebraicas fundamentales sean siempre aplicables. Tal ampliación es, precisamente, el concepto de número complejo.

Generalmente, en la Enseñanza Media Superior o Bachillerato de muchos países se imparten los números complejos, como es el caso de Cuba, pero donde este tema si es indispensable es en la introducción del estudio de las Funciones Analítica como es el caso del Instituto Superior de Ciencias de la Educación en la República de Angola.

En ese contexto, se han detectado dificultades en el proceso de enseñanza-aprendizaje concernientes a:

- a. La relación entre el cálculo algebraico y la representación gráfica de los resultados, jerarquizándose el primero y descuidando el segundo, porque generalmente tal representación en forma manual le resulta engorrosa a la mayoría de los alumnos.
- b. Expresar los números complejos en forma trigonométrica y su empleo resulta un problema para los alumnos, pese a que ellos se emplean para simplificar el cálculo ante situaciones como la potenciación de números complejos, ya que calcular con  $n > 2$  resulta complicado y para el cálculo de raíces donde se presenta una situación similar.

Una alternativa de solución de estas u otras situaciones análogas es el empleo de asistentes matemáticos como medio auxiliar heurístico, particularmente el software Geogebra con el que los autores han desarrollado otras experiencias.

## DESARROLLO

La propiedad fundamental de los números complejos es que las operaciones matemáticas con ellos realizadas no se salen de los límites de su definición.

El concepto de número complejo puede ser familiar al lector de los cursos de álgebra elemental, no obstante, recordaremos que en dichos cursos generalmente se llega a este concepto al analizar la ecuación

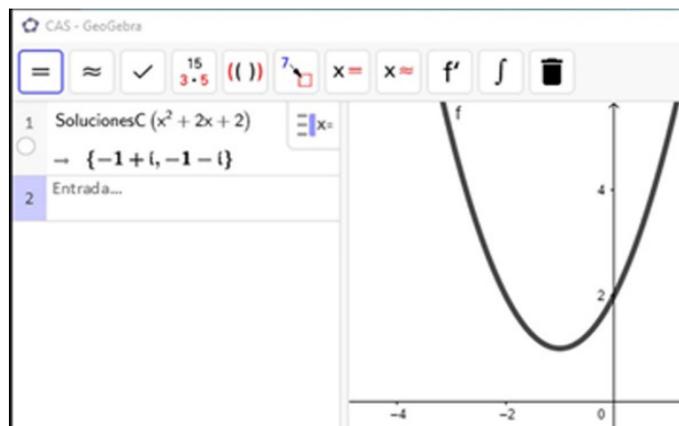
Lo primero que se observa es que no existen números reales que satisfagan dicha ecuación. Por eso se introduce un nuevo número “imaginario”, con ayuda del cual la citada ecuación resulta soluble y cuyas raíces son .

La historia recoge que la primera referencia a los números “imaginarios” como las raíces cuadradas de números reales negativos se remonta al siglo XVI (Cardano, 1545). Hasta la mitad del siglo XVIII los números complejos aparecen en algunos trabajos aislados de diferentes matemáticos (Newton, Bernoulli, Clairaut). En la segunda mitad del siglo XVIII se introduce el símbolo  $i$  y comienza un desarrollo sistemático de la teoría de los números complejos en los trabajos de eminentes matemáticos y físicos como Leonard Euler, August Cauchy, Karl Weierstrass, Bernhard Riemann, Casper Bessel y otros.

Inmediatamente después de resolver  $X^2 + 1 = 0$  pueden introducirse los números complejos como la suma de los números reales  $x$ , y con el número imaginarios  $i$  con los que es posible resolver ecuaciones como:

$$X^2 + 2X + 2 = 0$$

Utilizando el asistente Geogebra la solución de esta ecuación se muestra en la siguiente imagen, donde se utiliza el cálculo simbólico (CAS) que posee esta aplicación.



Las soluciones son:

$$X_1 = -1 + i; X_2 = -1 - i$$

Observe que la curva que representa la función no corta el eje de abscisas, por eso la ecuación no tiene soluciones en el conjunto de los números reales.

Una vez introducidos estos números, de la forma  $z = x + iy$  con el que se define un número complejo, todas las ecuaciones de segundo grado y en general cualquier ecuación de la forma

$$X^n + p_1x^{n-1} + p_2x^{n-2} + \dots + \dots + p_n = 0$$

con coeficientes arbitrarios tienen soluciones en el conjunto de los números complejos.

**Geogebra:**

GeoGebra es un software de matemática que reúne geometría, álgebra y cálculo. Lo ha desarrollado Markus Hohenwarter en la Universidad de Salzburgo para la enseñanza de matemática escolar.

Por un lado, GeoGebra es un sistema de geometría dinámica. Permite realizar construcciones tanto con puntos, vectores, segmentos, rectas, secciones cónicas como con funciones que a posteriori pueden modificarse dinámicamente.

Por otra parte, se pueden ingresar ecuaciones y coordenadas directamente. Así, GeoGebra tiene la potencia de manejarse con variables vinculadas a números, vectores y puntos; permite hallar derivadas e integrales de funciones y ofrece un repertorio de comandos propios del análisis matemático, para identificar puntos singulares de una función, como Raíces o Extremos.

Estas dos perspectivas caracterizan a GeoGebra: una expresión en la ventana algebraica se corresponde con un objeto en la ventana geométrica y viceversa.

**Definición de número complejo con Geogebra:**

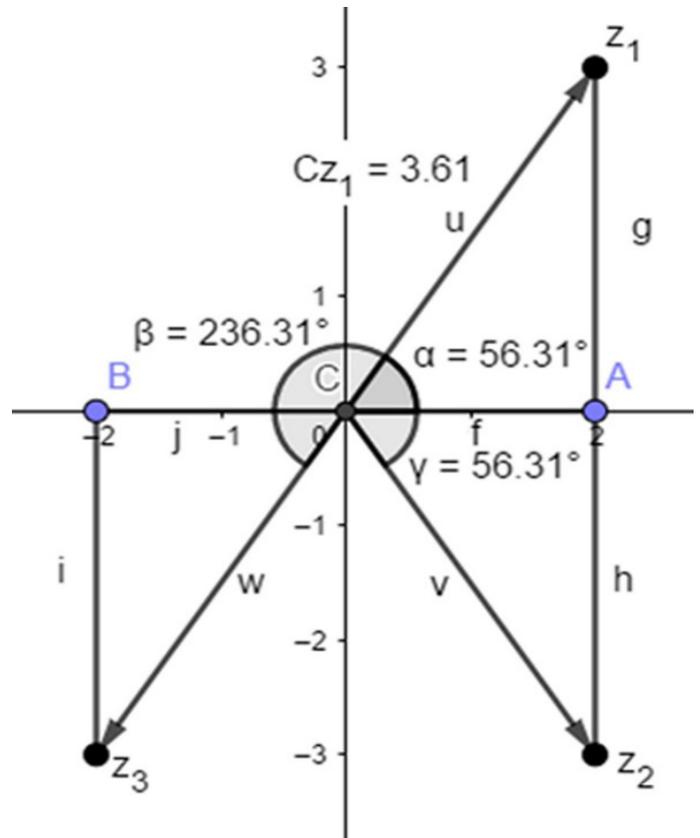
Se llama número complejo o simplemente complejo a un número de la forma

$$z = x + iy$$

Donde:  $x \in \mathbb{R}$ ;  $y \in \mathbb{R}$ . El número  $x$  se denomina parte real del número complejo  $x = \text{Re}(z)$  y el número  $y$  se denomina parte imaginaria del número complejo  $y = \text{Im}(z)$ .

Esta forma de definición se conoce como forma binómica, forma algebraica, o forma de Descartes del número complejo. Otra forma de dar esta definición, es como un par ordenado  $z=(x,y)$

Ambas formas se pueden representar geoméricamente como se muestra a continuación y parte de la posibilidad del Geogebra de asignar un punto del plano cartesiano a cualquier número  $Z_k=x+iy$  como se muestra en la siguiente imagen generada en Geogebra:



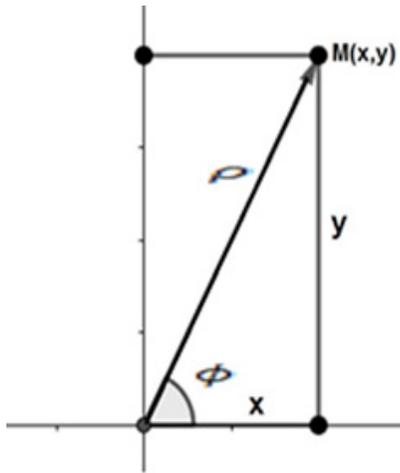
Obsérvese  $z_1=(2,3)$  que respecto a  $z_1$  se tiene dos números  $z_2=(2,-3)$  y  $z_3=(-2,-3)$  con características particulares:

$$\left\{ \begin{array}{l} z_1 = (2,3) \\ z_2 = (2,-3), z_1 \text{ y } z_2 \text{ son números} \\ \text{complejos conjugados} \\ z_3 = (-2,-3) z_1 \text{ y } z_3 \text{ son números} \\ \text{complejos opuestos} \end{array} \right\}$$

La tercera forma de presentar el número complejo es la forma trigonométrica mediante las siguientes expresiones:

$$x=x+iy=p(\cos O) + ip \text{ sen}(O) = p(\cos O) + ip \text{ sen}(O) = p \text{ cis}(O)$$

Con:

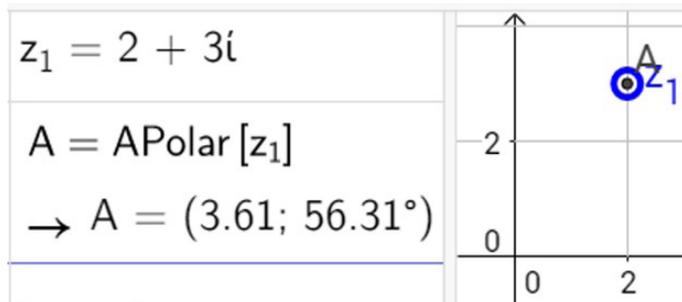


$$x = \rho(\cos\theta)$$

$$\theta = \arctg\left(\frac{y}{x}\right) \quad \rho = \sqrt{(x^2 + y^2)} \quad y = \rho \sin(\theta)$$

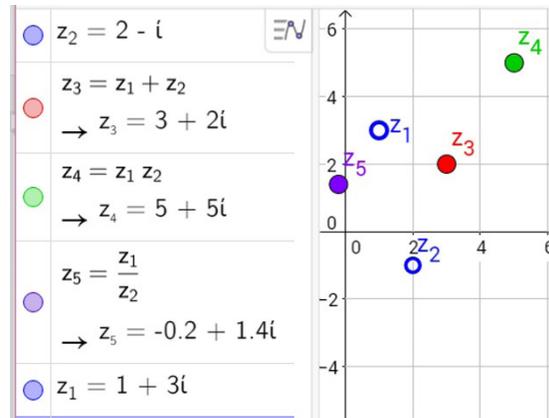
Pero estas fórmulas, que tienen un gran valor teórico-conceptual, se pueden obtener de dos formas en Geogebra, a partir del menú de medidas, o utilizando el comando

APolar[ <Complejo> ], el cual devuelve el módulo y el argumento del número complejo como se muestra en la siguiente imagen:



### Operaciones aritméticas de números complejos con Geogebra.

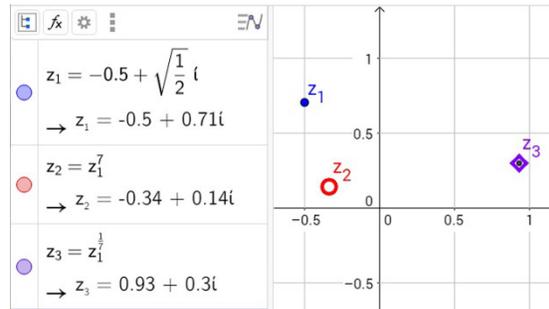
Las operaciones aritméticas elementales con números complejos se desarrollan como simples expresiones de cálculo como se dan en los ejemplos:



### Potencias y raíces de números complejos con Geogebra.

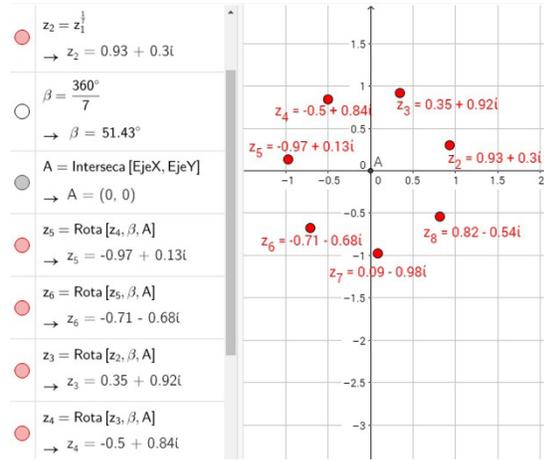
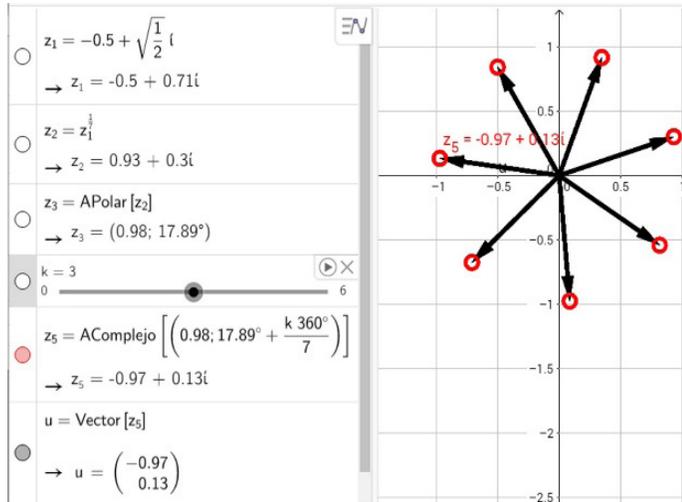
Se ha pospuesto el cálculo de la potencia y la raíz por las particularidades de estas operaciones. En estos casos la práctica indica expresar primero en forma trigonométrica el número complejo seleccionado para operar con él.

Supongamos que el número seleccionado sea  $z_1 = -0.5 + \sqrt{1/2}i$  y deseamos calcular , realmente la tarea es difícil, pero con Geogebra se puede resolver del siguiente modo:



Si se quiere expresar estos resultados a forma trigonométrica, basta con utilizar el comando APolar ya mencionado, pero con el cálculo de la raíz mediante  $(z_1)^{1/7}$  sólo se obtiene la raíz principal, el problema ahora es cómo obtener las demás raíces.

La respuesta se da en la siguiente gráfica



El algoritmo seguido es el siguiente:

1.  $z_2 = (z_1)^{(1/7)} = 0.93 + 0.3i$
2.  $APolar[z_2] = (0.98; 17.89^\circ)$
3.  $z_5 = AComplejo[0.98; 17.89^\circ + (k \cdot 360^\circ) / 7]$
4.  $U = Vector[z_5]$

El parámetro k (en 3) genera la necesidad de crear un deslizador, con la condición de variar entre 0 y 7 con incremento 1.

El algoritmo descrito transcribe a Geogebra el cálculo manual de la raíz n-sima de un numero complejo; pero existe otra posibilidad, la de calcular la raíz principal y después rotar ese vector un ángulo

Ejemplo: , de esta forma a partir de una raíz inicial (en este caso) se obtienen todas las raíces como se muestra en la siguiente imagen:

### CONCLUSIONES

En la alternativa propuesta se destacan se ha logrado un equilibrio entre el cálculo algebraico y la representación gráfica de los resultados.

Los problemas derivados del cálculo de potencias y raíces mediante la representación trigonométrica de los números complejos han sido mitigados, manteniendo los fundamentos teóricos-conceptuales del tema.

### REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Churchill, R. V. (1996). Variable compleja y aplicaciones. (Quinta edición. ed.). Madrid: McGraw-Hill. .

Crespo Hurtado, E. (2007). Modelo didáctico sustentado en la heurística para el proceso de enseñanza-aprendizaje de la Matemática asistida por computadoras. Tesis Doctoral. Santa Clara: ISP “Félix Varela”.

Hohenwarter, M. H. (2009). Documento de Ayuda de GeoGebra. Recuperado de <http://www.geogebra.org>

Toto, M. L. (2017). Empleo del software Geo-gebra como medio auxiliar heurístico para el tratamiento de funciones en el Instituto Superior de Ciencias Policiales y Criminal de la República de Angola. Revista Conrado, 13(57), 169-173. Recuperado a partir de <https://conrado.ucf.edu.cu/index.php/conrado/article/view/455>